

**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ:
ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΣΤΟ ΤΕΙ ΠΑΤΡΑΣ**

**ΥΠΟΕΡΓΟ 10:
«ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΕΑΚ ΓΙΑ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΑΝΤΙΣΤΗΡΙΞΗΣ »**

Επιστημονική Υπεύθυνος:
Δρ. Βγενοπούλου Ειρήνη, Καθηγήτρια ΤΕΙ Πατρας

**ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΚΘΕΣΗ ΠΑΡΑΔΟΤΕΩΝ ΠΕ.1
«Αναλυτικός Προσδιορισμός Οριακού Φορτίου σε Τοίχους
Αντιστήριξης υπό Σεισμική Φόρτιση»**

Συντάκτες:

Δρ. Βγενοπούλου Ειρήνη,	Καθηγήτρια ΤΕΙ Πατρας
Δρ. Γεώργιος Μυλωνάκης,	Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών
Δρ. Κλουκίνας Παναγιώτης,	Μεταδιδάκτορ Ερευνητής
κ. Λυρατζάκη Φωτεινή,	Υπ. Διδάκτ. Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2014



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι κατασκευές εδαφικής αντιστήριξης είναι ανάμεσα στις κλασικότερες και αρχαιότερες εφαρμογές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού και εξακολουθούν να βρίσκονται σε ευρύτατη χρήση, με διαρκώς αυξανόμενο ενδιαφέρον λόγω των απαιτήσεων των σύγχρονων έργων υποδομής αλλά και των αναγκών δόμησης σε πυκνό αστικό περιβάλλον. Το ενδιαφέρον εστιάζεται σε κατασκευαστικές λύσεις και μεθόδους σχεδιασμού που συνδυάζουν ασφάλεια και οικονομία. Η ανάλυση των συγκεκριμένων κατασκευών αντιμετωπίζει πλήθος δυσεπίλυτων προβλημάτων στο αντικείμενο της αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής που συχνά καθορίζουν τη συμπεριφορά του έργου. Η κατανόηση αυτών των μηχανισμών επιτρέπει το σχεδιασμό με μικρότερα περιθώρια αβεβαιότητας που οδηγούν σε οικονομικότερες και ορθολογικότερες λύσεις.

Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να συμβάλει στα παραπάνω, με την ανάπτυξη αναλυτικών εργαλείων και θεωρητικών ευρημάτων που βοηθούν στην κατανόηση των μηχανισμών της αλληλεπίδρασης και στην εκτίμηση της συμπεριφοράς των τοίχων αντιστήριξης υπό συνδυασμένη βαρυτική και σεισμική φόρτιση. Έμφαση δίνεται στην παραγωγή απλών κλειστών λύσεων και μεθοδολογιών για τον υπολογισμό των εδαφικών ωθήσεων και τη στατική ανάλυση του συστήματος τοίχου εδάφους. Η αξιοπιστία των προτεινόμενων λύσεων ελέγχεται μέσω συγκρίσεων με καθιερωμένες λύσεις και πειραματικά δεδομένα από τη βιβλιογραφία.

Στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας Τεχνικής Έκθεσης πραγματοποιείται εκτεταμένη ανασκόπηση των υφιστάμενων μεθόδων ανάλυσης των εδαφικών ωθήσεων και του προσδιορισμού του οριακού φορτίου. Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσονται απλές λύσεις κλειστής μορφής των τύπων άνω και κάτω ορίου της οριακής ανάλυσης, για τον υπολογισμό ενεργητικών και παθητικών εδαφικών ωθήσεων σε τοίχους βαρύτητας και τοίχους προβόλου. Οι προτεινόμενες λύσεις, παρότι προσεγγιστικές, πλεονεκτούν έναντι των κλασικών εξισώσεων Coulomb και Mononobe-Okabe τις οποίες μπορούν να αντικαταστήσουν. Σε ειδικές περιπτώσεις, όπως η περίπτωση τοίχων προβόλων με πεπλατυσμένο πέλαμα, οι προτεινόμενες λύσεις οδηγούν σε ακριβή αποτελέσματα βάσει των οποίων προτείνονται βελτιώσεις στο σχεδιασμό.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται επεκτάσεις της βασικής λύσης οριακής ανάλυσης τάσεων, οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό μη-υδροστατικών κατανομών ωθήσεων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

γαιών λαμβάνοντας υπόψη την κυματική διάδοση της σεισμικής διέγερσης στο επίχωμα, σύμφωνα με μια ορθότερη παραλλαγή της ιδέας των Steedman & Zeng και τις διαφορετικές κινηματικές συνθήκες που προέρχονται από την απόκριση του τοίχου με περιστροφή περί την κορυφή ή τη βάση σύμφωνα με την τεχνική της Dubrova. Αποδεικνύεται ότι η προτεινόμενη λύση πλεονεκτεί έναντι των υφιστάμενων λύσεων, ενώ η ακρίβεια της τεκμηριώνεται μέσω συγκρίσεων με πειραματικά δεδομένα.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται νέα ευρήματα στην κατεύθυνση της μαθηματικής αντιμετώπισης του δυσεπίλυτου προβλήματος της οριακής ισορροπίας ριπιδίου τάσεων σε εδαφικό μέσο στο οποίο ενεργούν βαρυτικές και αδρανειακές δυνάμεις πεδίου. Η παρούσα εργασία συμβάλλει στην περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος το οποίο θεμελίωσαν θεωρητικά οι Levy, Boussinesq, von Karman και Caquot, μέσω της δραστικής (αλλά ακριβούς) απλοποίησης του σε μία μη-γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση, η οποία επιτρέπει την επίλυση με απλές αριθμητικές και ημιαναλυτικές τεχνικές. Πέρα από τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα, η προτεινόμενη ανάλυση προσφέρει μια βαθύτερη εποπτεία στο πρόβλημα και ανοίγει το δρόμο για περαιτέρω διερεύνηση ή και επέκταση της μεθόδου πέρα από τα όρια της κλασικής οριακής ανάλυσης.

Στο Κεφάλαιο 5 συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η παρούσα έρευνα. Με βάση αυτά διατυπώνονται προτάσεις βελτίωσης της θεωρίας σχεδιασμού των τοίχων αντιστήριξης. Τέλος, στο Παράρτημα επισυνάπτονται δύο δημοσιεύσεις σχετικές με το περιεχόμενο της παρούσας Τεχνικές Έκθεσης που παρουσιάστηκαν στο 7^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής Μηχανικής, το οποίο διοργάνωσε η ΕΕΕΕΓΜ, υπό την αιγίδα του ΤΕΕ, 5-7 Νοεμβρίου 2014 στην Αθήνα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	i
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	iii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΑΣΤΟΧΙΑΣ	1
1.1 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΑΣΕΙ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ – ΨΕΥΔΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	1
1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	3
1.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	7
1.3.1 Το Θεώρημα Άνω Ορίου (μη-ασφαλής μέθοδος).....	10
1.3.2 Το Θεώρημα Κάτω Ορίου (ασφαλής μέθοδος)	12
1.4 ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΤΩ ΚΑΙ ΑΝΩ ΟΡΙΟΥ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	15
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	15
2.2 ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΤΩ ΟΡΙΟΥ.....	16
2.2.1 Βασική προσεγγιστική λύση κάτω ορίου (Mylonakis et al., 2007).....	16
2.2.2 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και επεκτάσεις της λύσης.....	26
2.2.3 Ειδικές περιπτώσεις γενικευμένου πεδίου τάσεων Rankine.....	27
2.2.4 Εφαρμογή της γενικευμένης θεωρίας Rankine στην περίπτωση των τοίχων προβόλων	31
2.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΑΝΩ ΟΡΙΟΥ.....	39
2.3.1 Μηχανισμοί λογαριθμικής σπείρας.....	39
2.3.2 Προτεινόμενοι μηχανισμοί αστοχίας	40
2.3.2.1 Μηχανισμός με δύο ζώνες Rankine και παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα.....	40
2.3.2.2 Μηχανισμός με μία ζώνη Rankine και λογαριθμική σπείρα μέχρι τον τοίχο	51
2.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα – Συγκρίσεις.....	56
2.4 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΤΟΞΩΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΕΛΑΦΟΥΣ	63
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	63
3.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΗΣ ΤΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ.....	65
3.2.1 Η μέθοδος των Steedman & Zeng (1990) και οι επεκτάσεις της.....	65



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

3.2.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία βάσει οριακής ανάλυσης τάσεων	67
3.2.2.1 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας	67
3.2.2.2 Συνοριακές συνθήκες και συναρτήσεις σχήματος	68
3.2.2.3 Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων	72
3.3 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΤΟΥ ΤΟΙΧΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ	74
3.3.1 Μέθοδος Dubrova (1963)	74
3.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου Dubrova στην οριακή ανάλυση τάσεων.....	75
3.3.2.1 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας	75
3.3.2.2 Συναρτήσεις Σχήματος για τη μεταβολή των παραμέτρων φ και δ	76
3.3.2.3 Τυπικές κατανομές ωθήσεων για τις διάφορες συναρτήσεις σχήματος και τις κινηματικές συνθήκες.....	82
3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	85
3.4.1 Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για βαρυτικές κατανομές ωθήσεων	85
3.4.1.1 Αποτελέσματα για ενεργητική περιστροφή του τοίχου (Fang & Ishibashi, 1986)	85
3.4.1.2 Αποτελέσματα για παθητική περιστροφή του τοίχου (Fang et al., 1994).....	87
3.4.1.3 Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για σεισμικές κατανομές ωθήσεων	89
3.5 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	93
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΠΙΔΙΟΥ ΤΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΙΔΙΟΝ ΒΑΡΟΣ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΛΑΦΙΚΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ	95
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	95
4.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	95
4.2.1 Η θεμελίωση του προβλήματος από τον Coulomb (1776).....	95
4.2.2 Οι πρωτοπόροι της οριακής ανάλυσης τάσεων: Rankine (1857), Levy (1873) και Boussinesq (1876).....	99
4.2.3 Εξέλιξη της θεωρίας στον 20ο αιώνα	104
4.2.3.1 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης.....	105
4.2.3.2 Το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες – η ιδιότητα της αυτομοιότητας.....	108
4.2.3.3 Εναλλακτικό σύστημα εξισώσεων	111
4.2.3.4 Η προσέγγιση του Caquot (1934; 1948)	112
4.2.3.5 Η χρήση της συνάρτησης δυναμικού ή συνάρτηση Airy (1862).....	114

4.3 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	115
4.3.1 Το υπό εξέταση πρόβλημα.....	115
4.3.2 Μετατροπή της εξίσωσης σε πολικές συντεταγμένες και απλοποίηση σε συνήθη διαφορική εξίσωση	117
4.3.2.1 Γενική μορφή	117
4.3.2.2 Εφαρμογή αυτοομοιότητας	119
4.3.2.3 Ακριβείς λύσεις – ειδικές περιπτώσεις.....	120
4.3.2.4 Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.....	121
4.3.2.5 Διερεύνηση της συνοριακής συνθήκης που εκφράζει την κλίση της τάσης.....	124
4.3.3 Μετατροπή της συνήθους διαφορικής εξίσωσης σε γραμμικοποιημένη μορφή.....	127
4.3.3.1 Γραμμικοποίηση κατά Azarou (1975).....	127
4.3.3.2 Ακριβής επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για σταθερή κλίση $\delta(\theta)$	129
4.4 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΛΥΣΕΩΝ.....	130
4.4.1 Διακριτοποίηση ζώνης Boussinesq και επίλυση με πεπερασμένες διαφορές.....	130
4.4.1.1 Αριθμητική μέθοδος Newton	130
4.4.1.2 Επίλυση στην αρχική μορφή της Εξ. 4.46.....	134
4.4.1.3 Επίλυση στη γραμμικοποιημένη μορφή της Εξ. (4.71).....	135
4.4.1.4 Ακρίβεια και ευστάθεια της αριθμητικής λύσης.....	136
4.4.2 Επίλυση με επαναληπτική μέθοδο σύγκλισης	138
4.4.3 Αξιολόγηση της προσεγγιστικής εκθετικής λύσης για το ριπίδιο των τάσεων (Mylonakis et al., 2007)	154
4.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ.....	159
4.5.1 Συγκρίσεις βαρυτικών ωθήσεων	159
4.5.2 Συγκρίσεις σεισμικών ωθήσεων	170
4.6 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	182
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	185
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	189

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΑΣΤΟΧΙΑΣ

1.1 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΑΣΕΙ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ – ΨΕΥΔΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Παρότι οι κατασκευές εδαφικής αντιστήριξης αποτελούν ένα από τα κλασικότερα έργα πολιτικού μηχανικού στο αντικείμενο της Γεωτεχνικής Μηχανικής και παρόλη τη δομική τους απλότητα, η ανάλυση των κατασκευών αυτών για βαρυτική και (κυρίως) σεισμική φόρτιση είναι αρκετά σύνθετο πρόβλημα, το οποίο εμπίπτει στην κατηγορία της αλληλεπίδρασης εδάφους - κατασκευής και έχει ιστορικά προσελκύσει το ενδιαφέρον μεγάλου αριθμού ερευνητών.

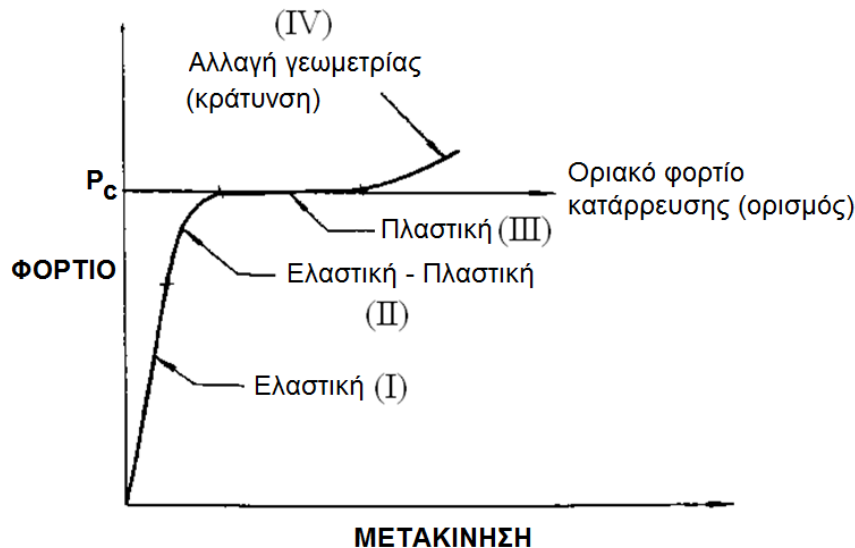
Οι πλέον απλοποιημένες μέθοδοι σχεδιασμού βασίζονται στον υπολογισμό του οριακού φορτίου αστοχίας που καλείται «ενεργητική ώθηση» και αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή που παίρνει η εδαφική ώθηση, όταν ο μηχανισμός αστοχίας έχει δημιουργηθεί. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται και η «παθητική αντίσταση» που αντιστέκεται στην αστοχία. Για να φτάσει το σύστημα τοίχου-εδάφους σε ενεργητική αστοχία, απαιτείται η ανάπτυξη μιας ορισμένης μετακίνησης του τοίχου. Συνεπώς, ο σχεδιασμός τοίχων αντιστήριξης με βάση την ενεργητική ώθηση οφείλει να λάβει υπόψη την ενδοσιμότητα του συστήματος, ώστε να αναπτυχθεί η απαραίτητη παραμόρφωση.

Η πλήρης περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού μέσω της καμπύλης φορτίου – μετατόπισης για συγκεκριμένη όδευση τάσεων, όπως απεικονίζεται γραφικά στο Σχ. 1.1, περιλαμβάνει τέσσερις διακριτές περιοχές της τυπικής πορείας προς την αστοχία,

- I: Γραμμική ελαστικότητα
- II: Ελαστοπλαστική περιοχή
- III: Καθαρά πλαστική περιοχή (φορτίο αστοχίας)
- IV: Κράτνωση ή χαλάρωση

Η πλήρης ελαστοπλαστική ανάλυση του προβλήματος, απαιτεί σε κάθε περιοχή του παραπάνω διαγράμματος την ικανοποίηση των τεσσάρων ακόλουθων συνθηκών:

- α) Εξισώσεις ισορροπίας
- β) Σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων
- γ) Συμβιβαστικότητα των παραμορφώσεων
- δ) Συνοριακές συνθήκες



Σχήμα 1.1 Μηχανισμός ανάπτυξης πλαστικής διαρροής – ορισμός οριακού φορτίου (τροποποιημένο από Atkinson, 1993)

Με βάση τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η πλήρης ελαστοπλαστική ανάλυση της συμπεριφοράς ενός τοίχου αντιστήριξης είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και πρακτικά ανέφικτη με αμιγώς αναλυτικές μεθόδους. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί λιγότερο πολύπλοκες μέθοδοι, οι οποίες προσδιορίζουν μόνο το οριακό φορτίο αστοχίας, όπως είναι η μέθοδος της Οριακής Ισορροπίας και η μέθοδος της Οριακής Ανάλυσης. Οι λύσεις που προκύπτουν με αυτές τις μεθόδους είναι είτε κινηματικές (αν χρησιμοποιούν μηχανισμό αστοχίας και εξετάζουν ισοζύγιο έργων), είτε τασικές (αν εξετάζουν την ισορροπία των τάσεων στο εδαφικό μέσο).

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι βασίζονται στην εξιδανίκευση του προβλήματος μέσω της θεώρησης της σεισμικής δράσης με τη μορφή σταθερών (ψευδοδυναμικών) οριζόντιων και κατακόρυφων δυνάμεων πεδίου σε ολόκληρη την εδαφική μάζα. Επίσης αγνοείται τελείως η επίδραση της σεισμικής δράσης στις δυναμικές και μηχανικές ιδιότητες του εδάφους, καθώς το εδαφικό υλικό θεωρείται εσωτερικά «απαραμόρφωτο». Η κίνηση του θεωρούμενου μηχανισμού γίνεται πάνω σε προκαθορισμένες επιφάνειες αστοχίας και είναι καθαρά μεταφορική, χωρίς περιστροφή.

Παρότι προσεγγιστικές, η αξία των ψευδοστατικών αυτών λύσεων δεν έχει υποβαθμιστεί με την εμφάνιση σύγχρονων μεθόδων σχεδιασμού με βάση τις επιτρεπόμενες μετακινήσεις ή την επιτελεστικότητα, καθώς χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη του φορτίου διαρροής και της αντίστοιχης κρίσιμης επιτάχυνσης πάνω από την οποία αναπτύσσονται οι μόνιμες δυναμικές μετακινήσεις.

1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η μέθοδος της οριακής ισορροπίας αποτελεί βασικό εργαλείο της Γεωτεχνικής Μηχανικής για περισσότερο από διακόσια χρόνια, με αφητηρία την πρωτοποριακή εργασία του Coulomb (1776). Η κεντρική ιδέα της μεθόδου συνίσταται στην επιλογή ενός αυθαίρετου, στατικώς ορισμένου μηχανισμού αστοχίας στα σύνορα του οποίου εφαρμόζεται ισορροπία δυνάμεων χωρίς να παραβιάζεται το κριτήριο αστοχίας. Πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ότι το εξαγόμενο φορτίο αστοχίας δεν απέχει σημαντικά από το πραγματικό οριακό φορτίο ακόμα κι αν ο μηχανισμός αστοχίας δεν είναι ο βέλτιστος.

Η μέθοδος οριακής ισορροπίας βασίζεται στα ακόλουθα διαδοχικά βήματα:

α) Σχεδιάζεται ένας τυχαίος, πλην όμως εύλογος μηχανισμός αστοχίας ο οποίος αποτελείται από στερεά εδαφικά τεμάχια και συνδυασμούς ευθυγράμμων και καμπύλων επιφανειών ολίσθησης, πάνω στις οποίες ικανοποιείται το κριτήριο αστοχίας.

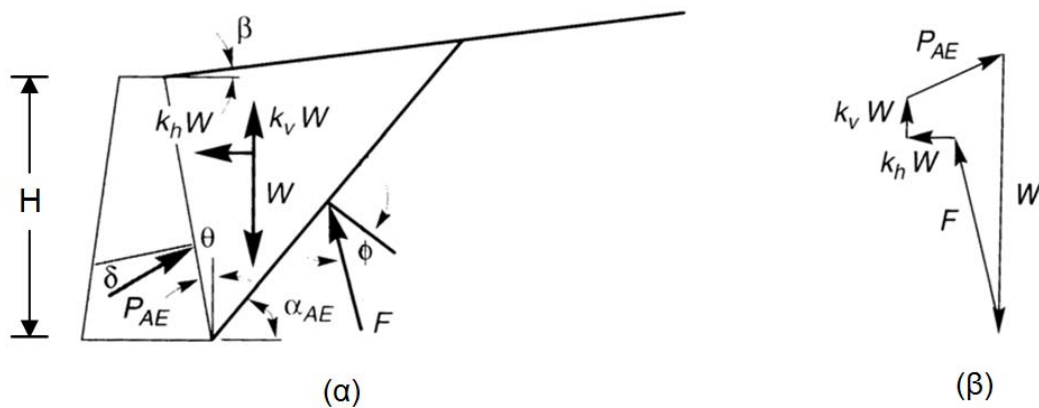
β) Θεωρείται η στατική ισορροπία των δυνάμεων πεδίου και επαφής ή, εναλλακτικά, των ροπών που δρουν πάνω στο μηχανισμό αστοχίας και υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο αστοχίας. Για την εκτέλεση του συγκεκριμένου βήματος, ο μηχανισμός αστοχίας οφείλει να είναι στατικώς ορισμένος.

γ) Εξετάζεται η στατική ισορροπία διαφόρων (θεωρητικά άπειρων) μηχανισμών αστοχίας ώστε να βρεθεί ο κρισιμότερος, ο οποίος αντιστοιχεί στο ελάχιστο φορτίο αστοχίας. Αν το ζητούμενο φορτίο αντιστέκεται στην αστοχία (ενεργητική ώθηση), τότε η διαδικασία βελτιστοποίησης οφείλει να οδηγεί σε μέγιστο οριακό φορτίο.

Μέχρι και σήμερα, σε όλους τους διεθνείς αντισεισμικούς κανονισμούς (όπως ο EC8, οι Αμερικάνικοι κανονισμοί AASHTO-LRFD, NEHRP-FEMA και άλλοι) για τον υπολογισμό της σεισμικής ώθησης χρησιμοποιείται η λύση οριακής ισορροπίας των Mononobe - Okabe (Mononobe & Matsuo, 1929; Okabe, 1926). Είναι η πρώτη, απλούστερη και πλέον χρησιμοποιούμενη ψευδοδυναμική λύση, η οποία αποτελεί άμεση επέκταση της στατικής λύσης Coulomb. Ο υπολογισμός του φορτίου βασίζεται στην ισορροπία των δυνάμεων που ενεργούν στον τριγωνικό μηχανισμό αστοχίας που απεικονίζεται στο Σχ. 1.2α. Το τριγωνικό πρίσμα αστοχίας σχηματίζεται από τη διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους με τραχύτητα δ (γενικά διαφορετική από φ), και από ένα ευθύγραμμο επίπεδο ολίσθησης με γωνία τριβής φ , η κλίση του οποίου προκύπτει από τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Στο Σχ. 1.2β απεικονίζεται η ισορροπία των δυνάμεων που ενεργούν στο εδαφικό πρίσμα το οποίο αποτελείται από ξηρό, μη-συνεκτικό έδαφος.

Η σεισμική δράση λαμβάνεται υπόψη μέσω σταθερών (ψευδοδυναμικών) αδρανειακών δυνάμεων που υπολογίζονται βάσει δεδομένων σεισμικών συντελεστών $k_h = a_h/g$ και $k_v = a_v/g$, όπου a_h και a_v η οριζόντια και κατακόρυφη ψευδοδυναμική επιτάχυνση αντίστοιχα. Η συνισταμένη αδρανειακή δράση (βαρυτική και σεισμική) δρα υπό γωνία ψ_e ως προς την κατακόρυφη, όπου

$$\tan \psi_e = \frac{k_v}{1 - k_h} \tag{1.1}$$



Σχήμα 1.2 (α) Δυνάμεις που ενεργούν στο αντιστηριζόμενο εδαφικό πρίσμα σύμφωνα με τη μέθοδο Mononobe – Okabe (β) Πολύγωνο δυνάμεων που απεικονίζει την ισορροπία δυνάμεων στο αντιστηριζόμενο εδαφικό πρίσμα

Η συνισταμένη (βαρυτική και σεισμική) ενεργητική ώθηση προκύπτει από τις σχέσεις:

$$P_{AE} = \frac{1}{2} K_{AE} \gamma H^2 (1 - k_v) \tag{1.2}$$

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(\varphi - \theta - \psi_e)}{\cos \psi_e \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos(\delta + \theta + \psi_e) \cdot \left[1 + \frac{\sin(\delta + \varphi) \sin(\varphi - \beta - \psi_e)}{\cos(\delta + \theta + \psi_e) \cos(\beta - \theta)} \right]^2} \tag{1.3}$$

όπου K_{AE} ο συντελεστής ενεργητικών σεισμικών εδαφικών ωθήσεων, θ η γωνία της παρειάς του τοίχου ως προς την κατακόρυφο και β η γωνία της επιφάνειας του αντιστηριζόμενου εδάφους με την οριζόντια (Σχ. 1.6). Η κλίση της επιφάνειας αστοχίας ως προς την οριζόντια δίνεται από τη σχέση

$$a_{AE} = \varphi - \psi_e + \tan^{-1} \left[\frac{-\tan(\varphi - \psi_e - \beta) + c_{1E}}{c_{2E}} \right] \tag{1.4}$$

όπου

$$c_{1E} = \sqrt{\tan(\varphi - \psi_e - \beta) [\tan(\varphi - \psi_e - \beta) + \cot(\varphi - \psi_e - \theta)] [1 + \tan(\delta + \psi_e + \theta) \cot(\varphi - \psi_e - \theta)]}$$

$$c_{2E} = 1 + \tan(\delta + \psi_e + \theta) [\tan(\varphi - \psi_e - \beta) + \cot(\varphi - \psi_e - \theta)] \quad (1.5\alpha, \beta)$$

Για βαρυντική φόρτιση μόνο ($\psi_e = 0$) η Εξ. (1.3) παίρνει τη γνωστή μορφή της λύσης Coulomb (Müller & Breslau, 1906). Στη συνήθη πρακτική, η συνισταμένη ενεργητική ώθηση P_{AE} εκφράζεται ως το άθροισμα της στατικής συνιστώσας P_A και της δυναμικής (ή σεισμικής) προσαύξεσης ΔP_{AE} σύμφωνα με την εξίσωση

$$P_{AE} = P_A + \Delta P_{AE} \quad (1.6)$$

Όπως ακριβώς και στη λύση Coulomb, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης ώθησης P_{AE} λαμβάνεται αυθαίρετα σε ύψος $H / 3$ από τη βάση του τοίχου, δηλαδή στο σημείο στο οποίο θεωρείται ότι ενεργεί η βαρυντική ώθηση. Παρ' όλα αυτά, πειραματικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι στην πραγματικότητα η συνισταμένη δρα σε μεγαλύτερο ύψος υπό συνθήκες δυναμικής φόρτισης. Τα πειράματα των Mononobe & Matsuo (1929) (βλ. Kramer 1996) επαληθεύουν το μέγεθος των ωθήσεων που προκύπτουν από την ανάλυση των M-O, ενώ μεταγενέστερες διερευνήσεις από τους Jacobsen (1939), Matsuo (1941), Ishii et al. (1960) (βλ. Giarlelis & Mylonakis, 2011), καθώς επίσης και τα πειράματα των Sherif et al. (1982) καταλήγουν σε παρόμοια συμπεράσματα. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για το σημείο εφαρμογής της εδαφικής ώθησης. Τα πειράματα των Jacobsen (1939) και αργότερα του Matsuo (1941) προσδιορίζουν ως απόσταση του σημείου εφαρμογής της δυναμικής συνιστώσας της ώθησης το $0,67 H$ από τη βάση, ενώ οι Ishii et al. (1960) εντοπίζουν το σημείο εφαρμογής της συνολικής ώθησης στο $0.40H$ στο οποίο συμφώνησαν αργότερα και οι Sherif et al. (1982).

Στην καθημερινή πράξη, το πρόβλημα συνήθως αντιμετωπίζεται με την ευρύτατα αποδεκτή τροποποίηση της M-O από τους Seed & Whitman (1970). Οι ανωτέρω ερευνητές προτείνουν ότι η δυναμική προσαύξεση ΔP_{AE} μπορεί να θεωρείται ότι δρα σε ύψος $0.6H$ (αν και διαπιστώνεται ότι σε εύκαμπτους και εύστρεπτους τοίχους η τιμή του $0.6H$ είναι συντηρητική), συνεπώς η συνισταμένη ενεργητική ώθηση δρα επάνω από τη βάση του τοίχου σε ύψος:

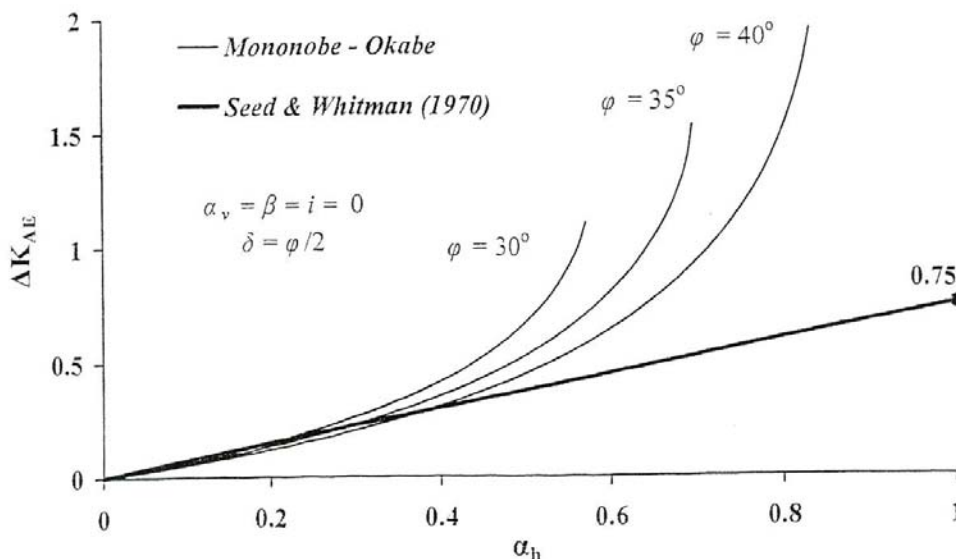
$$h = \frac{P_A H / 3 + \Delta P_{AE} (0.6H)}{P_{AE}} \quad (1.7)$$

Η ακριβής θέση του σημείου εφαρμογής, h εξαρτάται από τις σχετικές τιμές των P_A και P_{AE} . Συχνά καταλήγει να είναι στο μέσο του ύψους του τοίχου αντιστήριξης. Στην αποδοχή αυτή συντέλεσαν, τόσο τα συμπεράσματα της θεωρητικής διερεύνησης των Prakash & Basavanna (1969), όσο και τα πειράματα που προαναφέρθηκαν και τα συμπεράσματα ελαστικών λύσεων (Wood, 1973).

Επίσης οι Seed & Whitman (1970) παρατηρώντας ότι για μεγάλες τιμές της σεισμικής επιτάχυνσης η εξίσωση Mononobe – Okabe γίνεται εξαιρετικά συντηρητική, την απλοποίησαν προτείνοντας τον προσεγγιστικό υπολογισμό της δυναμικής προσαύξεσης ΔP_{AE} μέσω της σχέσης

$$\Delta P_{AE} = \frac{3}{8} \alpha_h \gamma H^2 \cos \delta = \frac{1}{2} \Delta K_{AE} \gamma H^2 \cos \delta \tag{1.8}$$

όπου $\Delta K_{AE} = 3k_h/4$ (Σχ.1.3). Η εξάρτηση του σεισμικού συντελεστή μόνο από το συντελεστή της οριζόντιας ψευδοδυναμικής επιτάχυνσης k_h οφείλεται στην παρατήρηση ότι η τιμή του σεισμικού συντελεστή κατακόρυφης επιτάχυνσης k_v έχει μικρή επίδραση στην τιμή της συνολικής ενεργητικής ώθησης P_{AE} και συχνά αγνοείται (Seed & Whitman, 1970). Παρ’ όλα αυτά, σημαντικές κατακόρυφες επιταχύνσεις ενδέχεται να εμφανισθούν στο πεδίο στην πλειοσεισθη περιοχή.



Σχήμα 1.3 Ο συντελεστής δυναμικής ενεργητικής ώθησης που προβλέπει η μέθοδος Mononobe – Okabe και η προσεγγιστική τιμή που πρότειναν οι Seed & Whitman (1970)

Η μέθοδος Mononobe - Okabe δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων, όπου η επιφάνεια αστοχίας είναι πρακτικώς ευθύγραμμη. Όπως η θεωρία Coulomb, υπερεκτιμά την παθητική αντίσταση, ιδιαίτερα για τιμές γωνίας τραχύτητας $\delta > \varphi/2$, όταν δηλαδή η επιφάνεια αστοχίας είναι έντονα καμπυλωμένη. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα της μεθόδου Mononobe - Okabe πρέπει να χρησιμοποιούνται και να ερμηνεύονται προσεκτικά. Για ακριβέστερα αποτελέσματα - ειδικά για παθητικές συνθήκες- έχουν αναπτυχθεί άλλες λύσεις οριακής ισορροπίας, οι οποίες προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική επιφάνεια αστοχίας, συνήθως με χρήση της συνάρτησης της λογαριθμικής σπείρας. Απλοί μηχανισμοί τέτοιας μορφής έχουν χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό βαρυτικών ωθήσεων από την εποχή του Terzaghi (1943). Με την ανάπτυξη των υπολογιστικών εργαλείων έχει γίνει δυνατή η βελτιστοποίηση πιο σύνθετων μηχανισμών και για σεισμικές ωθήσεις, όπως αυτοί που παρουσιάζονται από τους Kumar & Subba Rao (1997a), Kumar (2001), Murthy (2003), Morrison & Ebeling (1995) και Subba Rao & Choudhury (2005). Επίσης έχουν προταθεί μηχανισμοί που αποτελούνται εξολοκλήρου από λογαριθμική σπείρα, όπως στη λύση των Soubra & Macuh (2002) καθώς επίσης και πολυπρισματικοί μηχανισμοί με τη μέθοδο των λωρίδων που χρησιμοποιείται στην ανάλυση της ευστάθειας πρανών (Chugh, 1995; Kumar & Subba Rao, 1997b; Ling et al., 2007).

Οι συντελεστές ενεργητικών ωθήσεων που προβλέπει η μέθοδος της λογαριθμικής σπείρας θεωρούνται πιο ακριβείς από αυτούς που παράγουν οι απλοποιημένες λύσεις Coulomb και Mononobe - Okabe, παρόλα αυτά η διαφορά είναι γενικώς μικρή. Στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, υπάρχει σημαντική βελτίωση με τη χρήση των ακριβέστερων αυτών λύσεων, οι οποίες όμως έχουν το μειονέκτημα ότι δεν καταλήγουν σε απλές, κλειστής μορφής εκφράσεις, γεγονός που τις καθιστά δύσχρηστες συγκριτικά με τις κλειστές εκφράσεις των λύσεων Coulomb και Mononobe - Okabe.

1.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η μέθοδος της οριακής ανάλυσης αποτελεί μια πιο πρόσφατη εξέλιξη στην επίλυση προβλημάτων φέρουσας ικανότητας. Ταυτόχρονα με την ανάπτυξη και τη μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας πλαστικότητας στην Ευρώπη και τις ΗΠΑ (Kazinczy 1914, 1938; Maier & Leibnitz, 1928; Melan, 1932; Bleich, 1932; Melan, 1936), στην ΕΣΣΔ ο Gvozden (1936) παρουσίασε για πρώτη φορά, χωρίς απόδειξη, τα θεμελιώδη θεωρήματα της θεωρίας πλαστικότητας, τα οποία αργότερα αποδείχθηκαν μαθηματικά από ερευνητές στη

Δύση (Shanley, 1947; Hill, 1950; Drucker, 1950; Drucker et al., 1952; Greenberg & Prager, 1952; Prager & Hodge, 1951; Symonds & Neal, 1951; Prager & Drucker, 1952 κ.α.). Η θεμελίωση των θεωρημάτων της πλαστικότητας, άσκησε σημαντική επίδραση κατά το δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα, με αντίκτυπο τόσο στην ανάπτυξη θεωρητικών, αναλυτικών μοντέλων, όσο και στη φιλοσοφία σχεδιασμού των κατασκευών σε επίπεδο κανονισμών. Σύμφωνα με τη θεωρία πλαστικότητας, θεωρούνται δύο διαφορετικές οριακές καταστάσεις: η κατάσταση Ι στην οποία ικανοποιείται πάντοτε η ισορροπία για φορτίο P_I , και η κατάσταση ΙΙ στην οποία υπάρχει μετακίνηση της κατασκευής, η οποία προκαλείται μόνο από πλαστικές παραμορφώσεις - μετακινήσεις, υπό φορτίο P_{II} . Για την κατάσταση Ι υπάρχει το μέγιστο φορτίο P_I^{\max} στο οποίο διατηρείται ισορροπία ενώ για την κατάσταση ΙΙ υπάρχει το ελάχιστο φορτίο P_{II}^{\min} στο οποίο παρατηρείται πλαστική παραμόρφωση. Από τα παραπάνω προκύπτουν τα τρία βασικά θεωρήματα της πλαστικής οριακής ανάλυσης:

1^ο Θεώρημα: Μοναδικότητα

Το φορτίο αστοχίας έχει μοναδική τιμή $P_c = P_I^{\max} = P_{II}^{\min}$.

2^ο Θεώρημα: Άνω όριο

Μια τιμή P_{II} που υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη πλαστική μετακίνηση είναι άνω όριο του φορτίου αστοχίας ($P_{II} \geq P_c$).

3^ο Θεώρημα: Κάτω όριο

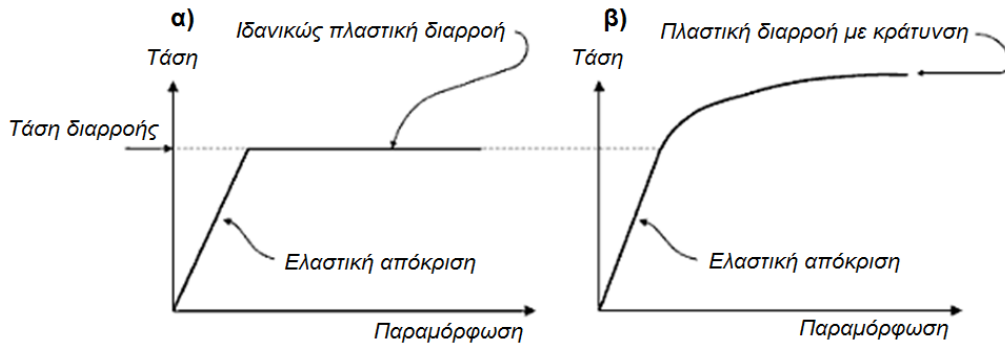
Μια τιμή P_I που υπολογίζεται σε κατάσταση ισορροπίας και ικανοποιεί το κριτήριο διαρροής είναι κάτω όριο του φορτίου αστοχίας ($P_I \leq P_c$).

Με εφαρμογή των μεθόδων αυτών δεν προκύπτει άμεσα το φορτίο αστοχίας αλλά προκύπτουν δύο τιμές οι οποίες συνιστούν το άνω και το κάτω όριο της τιμής του. Προκύπτει δηλαδή ένα πεδίο τιμών το οποίο φράσσει το φορτίο αστοχίας εκ των άνω και εκ των κάτω. Προφανώς όσο πιο κοντά βρίσκονται τα δύο αυτά όρια, τόσο μικρότερος βαθμός αβεβαιότητας υπάρχει για την πραγματική τιμή του φορτίου αστοχίας.

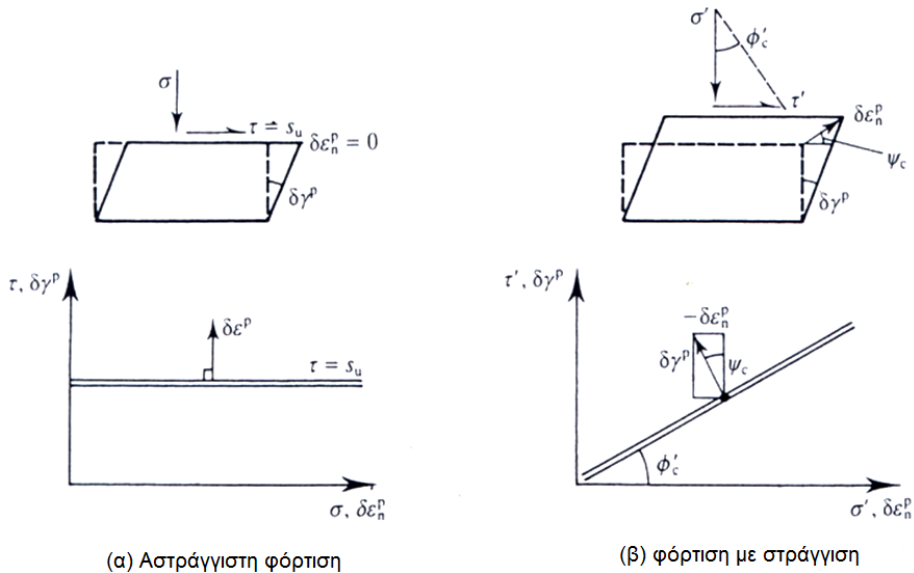
Τα θεωρήματα επί των οποίων θεμελιώνεται η μέθοδος ισχύουν υπό τις ακόλουθες προϋποθέσεις (Chen, 1975):

- α) Ελαστικό – απόλυτα πλαστικό υλικό, χωρίς κράτυνση ή χαλάρωση (Σχ.1.4)
- β) Η πλαστική παραμόρφωση να ακολουθεί το ιδεατό μοντέλο καθετότητας (Drucker, 1950) και ο κανόνας ροής να είναι συσχετισμένος ως προς το κριτήριο αστοχίας (Σχ. 1.5)
- γ) Σε χώρο τάσεων το κριτήριο αστοχίας να στρέφει τα κοίλα προς τα έσω, δηλαδή η επιφάνεια αστοχίας να είναι κυρτή (Σχ. 1.6)

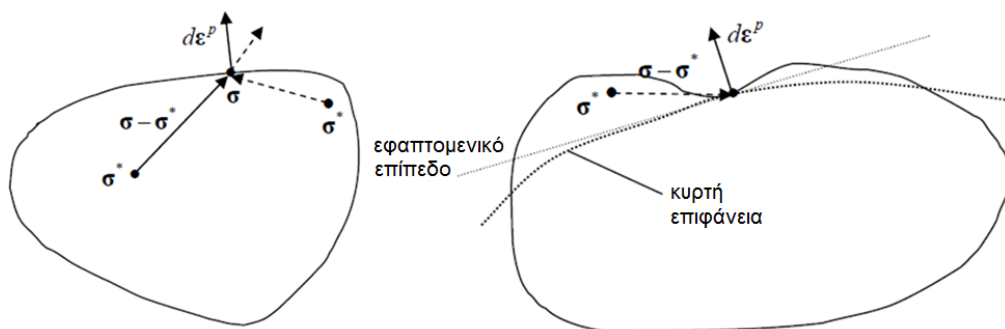
δ) Οι παραμορφώσεις να είναι πρακτικώς αμελητέες και να μην υπάρχει μεταβολή γεωμετρίας.



Σχήμα 1.4 (α) Ιδεατώς πλαστικό υλικό (β) υλικό με κράτνυση (τροποποιημένο από Atkinson, 1993)



Σχήμα 1.5 Πλαστική παραμόρφωση ιδεατώς πλαστικού εδάφους με συσχετισμένο κανόνα ροής (τροποποιημένο από Atkinson, 1993)

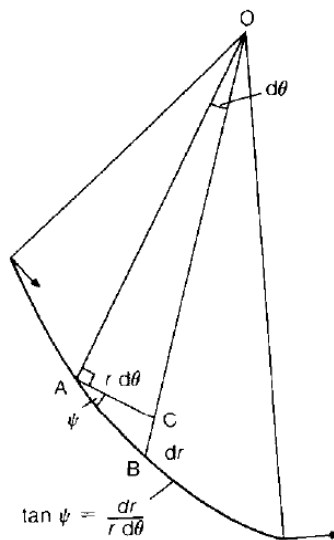


Σχήμα 1.6 Κυρτή επιφάνεια αστοχίας και καθετότητα (τροποποιημένο από Atkinson, 1993)

1.3.1 Το Θεώρημα Άνω Ορίου (μη-ασφαλής μέθοδος)

Το θεώρημα Άνω Ορίου συνοψίζεται στο εξής: αν μπορεί να βρεθεί ένας κινηματικά αποδεκτός μηχανισμός αστοχίας, στα όρια του οποίου ικανοποιείται το κριτήριο αστοχίας και εφαρμόζεται ο κανόνας πλαστικής ροής, ενώ το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το έργο που καταναλώνεται από τις τάσεις διαρροής στο εσωτερικό του μηχανισμού, τότε το μέσο οφείλει να αστοχήσει. Αυτό σημαίνει πως αν το ζητούμενο οριακό φορτίο επιβάλλει αστοχία (πρόβλημα φέρουσας ικανότητας), το εξαγόμενο αποτέλεσμα είναι πάντοτε μεγαλύτερο του πραγματικού. Το αντίστροφο ισχύει στο πρόβλημα της ενεργητικής ώθησης, όπου το ζητούμενο φορτίο αντιστέκεται στην αστοχία και έτσι προκύπτει μικρότερο του πραγματικού. Και στις δύο περιπτώσεις η ανάλυση δίνει μη συντηρητικά αποτελέσματα (μη-ασφαλής μέθοδος).

Η διαφορά που παρατηρείται σε σχέση με τη μέθοδο οριακής ισορροπίας είναι πως ο μηχανισμός αστοχίας οφείλει να είναι κινηματικά αποδεκτός. Αυτό σημαίνει πως δεν εξετάζεται η ισορροπία του συστήματος οριακά πριν την αστοχία, αλλά η αστοχία λαβαίνει χώρα. Επίσης δεν εξετάζεται ισορροπία δυνάμεων - παρά μόνο ισότητα μεταξύ παραγόμενου και καταναλισκόμενου έργου. Έχει ωστόσο αποδειχθεί (Michalowski, 1989) πως οι λύσεις οριακής ισορροπίας και κινηματικής οριακής ανάλυσης ταυτίζονται όταν εφαρμόζονται στον ίδιο μηχανισμό αστοχίας υπό την προϋπόθεση ότι είναι πάντοτε μεταφορικός και στατικός ορισμένος, γεγονός που αποδεικνύει τον κινηματικό και γενικώς ανασφαλή χαρακτήρα της μεθόδου οριακής ισορροπίας. Σε προβλήματα δύο διαστάσεων, οι επιφάνειες ολίσθησης οφείλουν να έχουν κατάλληλο σχήμα, όπως αυτό προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχ. 1.7 και τις Εξ. (1.9) και (1.10).



Σχήμα 1.7 Γεωμετρία των επιφανειών ολίσθησης σε δύο διαστάσεις (από Bolton, 1986)

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι

$$\frac{dr}{rd\theta} = \tan\psi \quad (1.9)$$

Μετά από ολοκλήρωση,

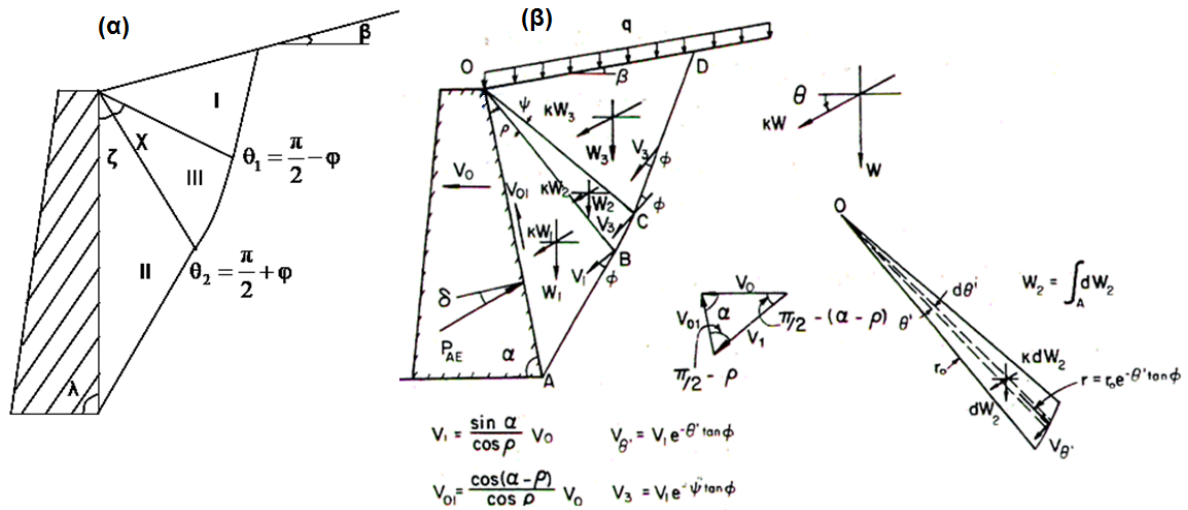
$$r = r_0 e^{\theta \tan\psi} \quad (1.10)$$

Η Εξ. (1.10) αποτελεί εξίσωση λογαριθμικής σπείρας για $\psi > 0$. Για την οριακή τιμή $\psi = 0$ μετατρέπεται σε $r/r_0 = 1$, άρα σε εξίσωση κυκλικού τόξου. Επιπλέον, για άπειρη ακτίνα καμπυλότητας μετατρέπεται σε εξίσωση ευθείας γραμμής. Επομένως για υλικό με τριβή και συσχετισμένο κανόνα ροής ($\psi = \phi$), ο μηχανισμός αστοχίας αποτελείται από λογαριθμικές σπείρες κι ευθείες γραμμές ενώ για αστράγγιστες συνθήκες ($\psi = 0$) αποτελείται από κυκλικά τόξα κι ευθείες γραμμές.

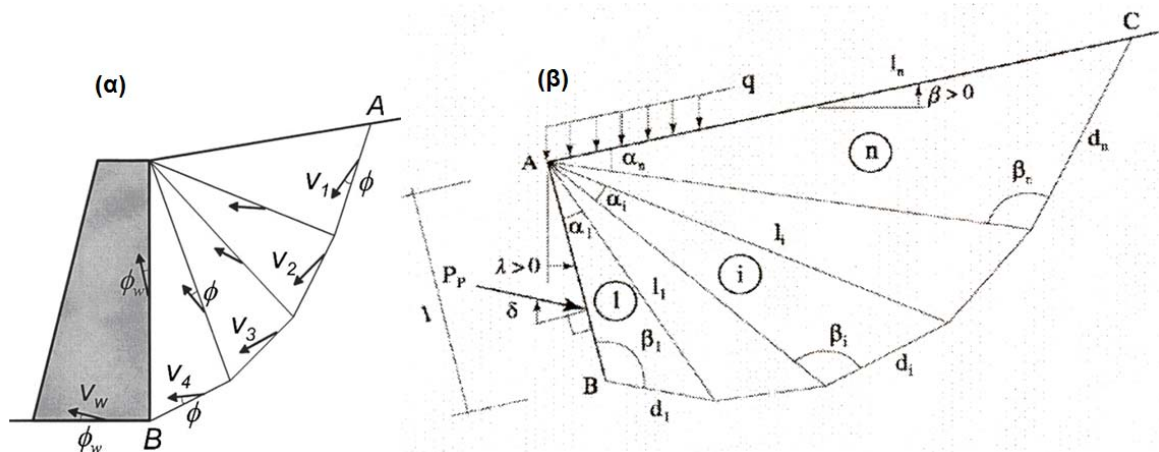
Αντίθετα με τη γεωμετρία του μηχανισμού αστοχίας, οι οριακές συνθήκες τάσεων δεν απαιτείται να ικανοποιούνται για να ισχύουν οι προϋποθέσεις της ανάλυσης, αν και η μη ικανοποίησή τους ουσιαστικά συνεπάγεται πως ο μηχανισμός δεν είναι βέλτιστος.

Η επιλογή του κατάλληλου μηχανισμού αστοχίας έχει μεγάλη σημασία για τον προσδιορισμό του φορτίου αστοχίας και για τους ελέγχους ευστάθειας. Στο Σχήμα 1.8 παρουσιάζεται ο μηχανισμός που χρησιμοποίησε ο Chen (1975) για βαρυτικές ωθήσεις και οι Chen & Liu (1990) για αντίστοιχες σεισμικές σε τραχύ κεκλιμένο τοίχο ο οποίος υπόκειται σε οριζόντια μεταφορική κίνηση, ο οποίος αποτελείται από τρεις περιοχές, δύο τριγωνικές ζώνες (ζώνες I και II) και ένα τμήμα λογαριθμικής σπείρας γωνίας ϕ (ζώνη III) που λειτουργεί ως μεταβατική ζώνη μεταξύ των ζωνών I και II. Αυτός ο συνδυασμός δημοσιεύτηκε από τους Chen & Rosenfarb (1973) ώστε να παρέχει το βέλτιστο άνω όριο από τους διάφορους μελετηθέντες μηχανισμούς.

Αρκετά διαδεδομένοι επίσης είναι πολυπρισματικοί (multiblock) κινηματικοί μηχανισμοί τύπου, όπως στην εργασία του Soubra (2000) για παθητικές ωθήσεις και του Michalowski (2007) για ενεργητικές (Σχ. 1.9). Ο κρίσιμος μηχανισμός των Chen & Liu προκύπτει με βελτιστοποίηση των γωνιών των τριγώνων ρ και ψ , ενώ οι πολυπρισματικοί μηχανισμοί των Soubra και Michalowski με την αύξηση του αριθμού των πρισμάτων n . Είναι προφανές ότι όσο πιο σύνθετος είναι ο μηχανισμός αστοχίας, τόσο αυξάνονται οι παράμετροι της βελτιστοποίησης και δυσκολεύει η εξαγωγή κλειστών αναλυτικών λύσεων.



Σχήμα 1.8 Κινηματική Οριακή Ανάλυση κατά: (α) Chen (1975) και (β) Chen & Liu (1990)



Σχήμα 1.9 Κινηματική Οριακή Ανάλυση με πολυπρισματικούς μηχανισμούς κατά (α) Michalowski (2007) και (β) Soubra (2000)

1.3.2 Το Θεώρημα Κάτω Ορίου (ασφαλής μέθοδος)

Το θεώρημα Άνω Ορίου συνοψίζεται στο εξής: Αν μπορεί να βρεθεί ένα ή περισσότερα (συνεχή ή ασυνεχή) πεδία τάσεων τα οποία ισορροπούν τα εξωτερικώς επιβαλλόμενα φορτία καθώς και μεταξύ τους, ενώ το κριτήριο αστοχίας δεν παραβιάζεται πουθενά, τότε το μέσο δεν μπορεί να αστοχήσει. Αν και η οριακή ανάλυση τάσεων δεν εξετάζει κανένα συγκεκριμένο μηχανισμό αστοχίας, ωστόσο ο προκύπτων μηχανισμός περιγράφεται από τις χαρακτηριστικές των τάσεων, οι οποίες για συσχετισμένο κανόνα ροής ($\phi = \psi$), ταυτίζονται με τις χαρακτηριστικές των ταχυτήτων.

Για την εξαγωγή της λύσης αρκεί να σχεδιαστούν κατάλληλα πεδία τάσεων τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας και τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων. Αυτό σημαίνει πως αν το ζητούμενο οριακό φορτίο επιβάλλει αστοχία (πρόβλημα φέρουσας ικανότητας), η τιμή που προσδιορίζεται από την παραπάνω ανάλυση είναι μικρότερη από την πραγματική. Αντίστροφα, αν το ζητούμενο φορτίο αντιστέκεται στην αστοχία (πρόβλημα ενεργητικής ώθησης), τότε η τιμή που λαμβάνεται είναι μεγαλύτερη της πραγματικής. Έτσι το αποτέλεσμα της μεθόδου βρίσκεται πάντοτε στην πλευρά της ασφάλειας.

Παρ' όλα τα πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου, υπάρχουν εγγενείς δυσκολίες στην εύρεση κατάλληλων πεδίων τάσεων σε προβλήματα που αποκλίνουν από τις πιο στοιχειώδεις γεωμετρίες και συνθήκες φόρτισης. Έτσι η συντριπτική πλειονότητα των λύσεων οριακής ανάλυσης στη Γεωτεχνική Μηχανική είναι του κινηματικού τύπου. Η πρώτη και πιο απλή λύση κάτω ορίου είναι η κλασική λύση του Rankine (1857) η οποία ισχύει για συνεχές πεδίο τάσεων και σταθερή κλίση χαρακτηριστικών. Για πιο γενικευμένες περιπτώσεις, έχει δημοσιευτεί περιορισμένος αριθμός προσεγγιστικών τασικών λύσεων για βαρυτικές ωθήσεις από τους Powrie (1997), Lancelotta (2002) και Muir Wood (2004) ενώ για το σεισμικό πρόβλημα από τους Lancelotta (2007) και τους Mylonakis et al. (2007) σε πιο γενικευμένη μορφή. Πιο αναλυτική αναφορά στη μέθοδο κάτω ορίου γίνεται στα Κεφάλαια 2 και 5 που ακολουθούν, όπου αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω προσεγγιστικές λύσεις δεν αποτελούν αυστηρά κάτω όρια καθώς παραβιάζουν την ισορροπία των τάσεων, πάντοτε όμως προς την πλευρά της ασφάλειας.

Στην κατηγορία των τασικών λύσεων μπορούν να ταξινομηθεί και η μέθοδος των χαρακτηριστικών ή μέθοδος γραμμών ολίσθησης. Πρόκειται για μια από τις παλιότερες μεθόδους ανάλυσης της μηχανικής των υλικών που αναπτύχθηκε τον 19^ο αιώνα για την εύρεση μηχανισμών και φορτίων αστοχίας, κυρίως σε όλκιμα υλικά, με εφαρμογή στη μεταλλουργική βιομηχανία. Σε προβλήματα γεωτεχνικής μηχανικής πρωτοεφαρμόστηκε στις αρχές του 20^ο αιώνα με διάφορες παραλλαγές από τους Kötter (1903), Prandtl (1923), von Karman (1927), Caquot (1934) και Caquot & Kerisel (1948). Στην ανάλυση γίνεται η υπόθεση ότι η αστοχία λαμβάνει χώρα κατά μήκος συγκεκριμένων γραμμών ολίσθησης. Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που καταστρώνονται για το πρόβλημα, παρέχουν τόσο την κλίση των γραμμών ολίσθησης, όσο και τις τάσεις που ασκούνται πάνω σε αυτές. Η μέθοδος υποθέτει ένα στατικώς αποδεκτό πεδίο τάσεων μέσα στο μηχανισμό αστοχίας, το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας σε δύο διαστάσεις όπως επίσης και το κριτήριο αστοχίας Mohr - Coulomb. Με βάση αυτές τις προϋποθέσεις, η μέθοδος των

χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης - παρότι δεν εξετάζει την ισορροπία σε ολόκληρο το μέσο - ταυτίζεται με τις αντίστοιχες λύσεις κάτω ορίου της οριακής ανάλυσης.

Το κύριο πρόβλημα της μεθόδου αποτελεί η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος, η οποία είναι δυνατή μόνο αριθμητικά. Οι πρώτες αξιόπιστες αριθμητικές λύσεις για το πρόβλημα των βαρυτικών ωθήσεων έχουν παρουσιαστεί εδώ και δεκαετίες (Sokolovskii, 1965; Lee & Herington, 1972). Λύσεις για συνθήκες με σεισμό έχουν δημοσιευτεί πρόσφατα όπως αυτές των Kumar & Chitikela (2002) και Cheng (2003).

1.4 ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα Τεχνική Έκθεση παρουσιάζονται νέες αναλυτικές λύσεις για τον υπολογισμό των εδαφικών ωθήσεων σε τοίχους αντιστήριξης υπό βαρυτική και σεισμική φόρτιση. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσονται απλές και εύχρηστες λύσεις, κλειστής μορφής, με βάση τις μεθόδους άνω και κάτω ορίου της πλαστικής οριακής ανάλυσης. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται επεκτάσεις της λύσης με τις οποίες αναλύεται η επίδραση της κυματικής φύσης της σεισμικής διέγερσης και των διαφορετικών κινηματικών συνθηκών του τοίχου στις κατανομές των ωθήσεων (μοντέλο Dubrova). Η ακρίβεια και η αξιοπιστία των συγκεκριμένων λύσεων αναφορικά με το μέγεθος της εδαφικής ώθησης, αλλά και το σημείο εφαρμογής της, τεκμηριώνεται μέσω μεγάλων αριθμών συγκρίσεων με καθιερωμένες μεθόδους από τη βιβλιογραφία και με πειραματικά δεδομένα.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται μια νέα τεχνική επίλυσης του προβλήματος της οριακής ισορροπίας τάσεων σε εδαφικό μέσο στο οποίο ενεργούν δυνάμεις πεδίου (ίδιον βάρος και αδρανειακές δυνάμεις) και οι οποίες οδηγούν στην πλαστικοποίηση του υλικού σε όλα τα σημεία του μέσου. Η παρούσα έρευνα συμβάλλει στην περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος το οποίο θεμελίωσαν θεωρητικά οι Boussinesq (1876), von Karman (1927) και Caquot (1934) μέσω μιας δραστηκής – όχι προσεγγιστικής – απλοποίησης η οποία επιτρέπει λύσεις με απλές αριθμητικές και ημιαναλυτικές τεχνικές. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την προτεινόμενη ανάλυση είναι πρακτικώς ακριβή, όπως δείχνουν εκτεταμένες συγκρίσεις με καθιερωμένες αριθμητικές λύσεις.

Τέλος, από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα και αναπτύσσονται προτάσεις για την απλοποίηση και την βελτίωση της ακρίβειας του υπολογισμού του οριακού φορτίου στους τοίχους αντιστήριξης.

2. ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΤΩ ΚΑΙ ΑΝΩ ΟΡΙΟΥ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο 1 αναλύθηκαν οι λόγοι για τους οποίους οι κλασικές λύσεις Coulomb (1776) και Mononobe – Okabe (Okabe, 1926; Mononobe & Matsuo, 1929) χρησιμοποιούνται ευρύτατα ακόμα και σήμερα για τον υπολογισμό βαρυτικών και σεισμικών εδαφικών ωθήσεων. Η συνήθης κριτική για αυτές τις λύσεις εστιάζεται στα εξής σημεία (Mylonakis et al, 2007): (1) Στο πλαίσιο της θεωρίας της οριακής ανάλυσης, οι προβλέψεις τους είναι μη ασφαλείς καθώς ο χαρακτήρας των λύσεων είναι καθαρά κινηματικός. (2) Η ακρίβεια και η ασφάλεια τους μειώνεται δραματικά για παθητικές ωθήσεις σε τραχείς τοίχους. (3) Οι μαθηματικές εκφράσεις τους είναι πολύπλοκες και δύσκολο να ελεγχθούν εποπτικά. (4) Δεν μπορούν να προβλέψουν την κατανομή των τάσεων επαφής στον τοίχο - συνήθως υποθέτουν τριγωνική κατανομή ακολουθώντας τη λύση του Rankine. (5) Όταν η γεωμετρία του μηχανισμού αστοχίας εξαρτάται από παράμετρο, απαιτούν βελτιστοποίηση του μηχανισμού αστοχίας για την εξεύρεση στάσιμης τιμής. (6) Οι οριακές συνθήκες τάσεων δεν ικανοποιούνται, καθώς η κρίσιμη επιφάνεια αστοχίας που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση, γενικά δεν ικανοποιεί την απαιτούμενη γωνία ανάδυσσης.

Αρκετά από τα παραπάνω μειονεκτήματα αντιμετωπίζονται με βελτιωμένους κινηματικούς μηχανισμούς, οι οποίοι όμως δεν οδηγούν σε κλειστές μαθηματικές λύσεις, αλλά σε πολυπαραμετρικές εκφράσεις που απαιτούν αριθμητική βελτιστοποίηση (Chen & Liu, 1990). Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και στις ακριβέστερες αναλύσεις με τη μέθοδο των γραμμών διαρροής η οποία επίσης επιλύεται αριθμητικά. (Caquot & Kerisel, 1948; Sokolovskii, 1965; Kerisel & Absi, 1990). Πρακτικά αυτό σημαίνει πως πέρα από το αμιγώς θεωρητικό τους ενδιαφέρον, οι σύνθετες κινηματικές λύσεις δεν προσφέρουν ένα απλό εργαλείο στους μηχανικούς, παρά μόνο αριθμητικές κατασκευές της λύσης σε μορφή πινάκων και νομογραφημάτων. Όπως γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω, η ανάπτυξη μιας απλής, κλειστής λύσης τάσεων που συνδυάζει την απλότητα και την ευχρηστία με τα υπόλοιπα πλεονεκτήματα της μεθόδου κάτω ορίου, είναι ιδιαίτερος χρήσιμη. Η κύρια δυσκολία ως προς αυτό έγκειται στην αδυναμία προσδιορισμού κατάλληλων τασικών πεδίων, γι' αυτό και η πλειονότητα των λύσεων οριακής ανάλυσης στη γεωτεχνική

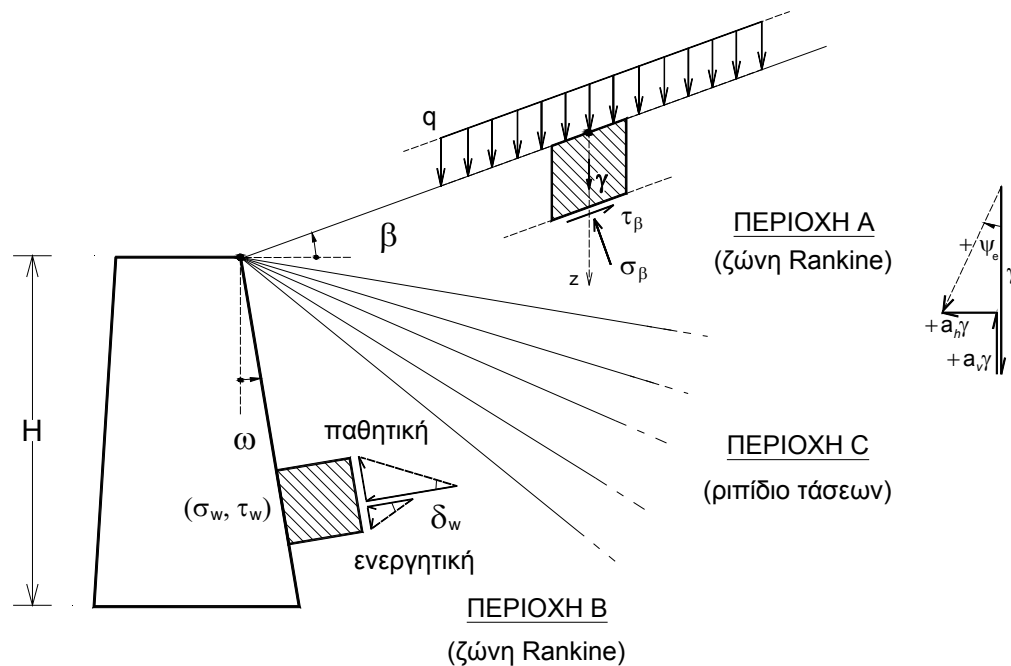
μηχανική είναι κινηματικού τύπου (Chen, 1975). Η πιο παλιά και πιο γνωστή λύση τάσεων είναι αυτή του Rankine, (1857) η οποία έχει όμως περιορισμένο εύρος εφαρμογής. Επεκτάσεις της λύσης Rankine έχουν δημοσιευθεί σε μεταγενέστερες εργασίες, όπως αυτές των Levy (1873), Saint-Venant (1870), Caquot (1934), Costet & Sanglerat (1975), Chu (1991), Soubra (2000) και Evangelista et al. (2010). Άλλες προσεγγιστικές λύσεις τάσεων έχουν δημοσιευτεί από τους Powrie (1997), Lancelotta (2002), και Muir Wood (2004). Λύσεις για το σεισμικό πρόβλημα έχουν πρόσφατα δημοσιευτεί από τους Lancelotta (2007) και σε πιο γενικευμένη μορφή από τους Mylonakis et al. (2007). Η δεύτερη λύση παρουσιάζεται στις ενότητες που ακολουθούν, σε διαφορετική μορφή από το αντίστοιχο άρθρο. Παρουσιάζονται ειδικές περιπτώσεις της λύσης που καταλήγουν σε ομοιόμορφο πεδίο Rankine υπό γενικευμένη γεωμετρία και φόρτιση, για τις οποίες η συγκεκριμένη ανάλυση είναι ακριβής, όπως στην περίπτωση τοίχων - προβόλων. Αναλύονται τα θεωρητικά πλεονεκτήματα της λύσης που επιτρέπουν επεκτάσεις για την περίπτωση μεταβλητής σεισμικής επιτάχυνσης, λόγω της κυματικής φύσης της σεισμικής διέγερσης και των διαφορετικών κινηματικών συνθηκών του τοίχου στις κατανομές των ωθήσεων (μοντέλο Dubrova). Τέλος, παρουσιάζεται μια κινηματική λύση οριακής ισορροπίας, η οποία όμως είναι συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων, όπως προκύπτουν από τη γενικευμένη οριακή ανάλυση τάσεων. Συγκρίσεις αριθμητικών αποτελεσμάτων μεταξύ των παραπάνω λύσεων και άλλων καθιερωμένων λύσεων της βιβλιογραφίας παρουσιάζονται με τη μορφή αδιάστατων διαγραμμάτων.

2.2 ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΤΩ ΟΡΙΟΥ

2.2.1 Βασική προσεγγιστική λύση κάτω ορίου (Mylonakis et al., 2007)

Στο Σχ. 2.1 απεικονίζεται το υπό εξέταση πρόβλημα που αφορά την περίπτωση επικλινούς εδαφικής μάζας από ξηρό, μη συνεκτικό υλικό, η οποία αντιστηρίζεται από τραχύ κεκλιμένο τοίχο βαρύτητας, και υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης υπό την επίδραση βαρυτικών και σεισμικών δυνάμεων πεδίου ($a_h \times g$) και ($a_v \times g$) στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα. Οι παράμετροι του προβλήματος είναι: το ύψος (H) και η κλίση (ω) του τοίχου, η κλίση (β) του πρανούς, η τραχύτητα (δ) της διεπιφάνειας τοίχου-εδάφους, η γωνία εσωτερικής τριβής (φ), το ειδικό βάρος (γ) του εδαφικού υλικού, και η επιφόρτιση στην επιφάνεια του εδάφους (q).

Όσον αφορά στην κινηματική του προβλήματος, η παρούσα ανάλυση θεωρεί μετατόπιση χωρίς περιστροφή του τοίχου, ικανού εύρους για να αναπτυχθούν πλήρως οι ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις. Επίσης η εδαφική μάζα θεωρείται συμπαγής πριν την πλαστική διαρροή, ώστε η κατανομή των σεισμικών αδρανειακών δράσεων καθ' ύψος να είναι ομοιόμορφη. Και οι δύο παραπάνω παραδοχές έχουν σημαντική επίδραση στην ακριβή κατανομή των εδαφικών ωθήσεων επί του τοίχου, όπως θα φανεί στη συνέχεια (βλ. Κεφάλαιο 3). Η συνισταμένη δύναμη πεδίου στο έδαφος δρα υπό γωνία ψ_e ως προς την κατακόρυφη, όπου $\tan\psi_e = a_h/(1-a_v)$.

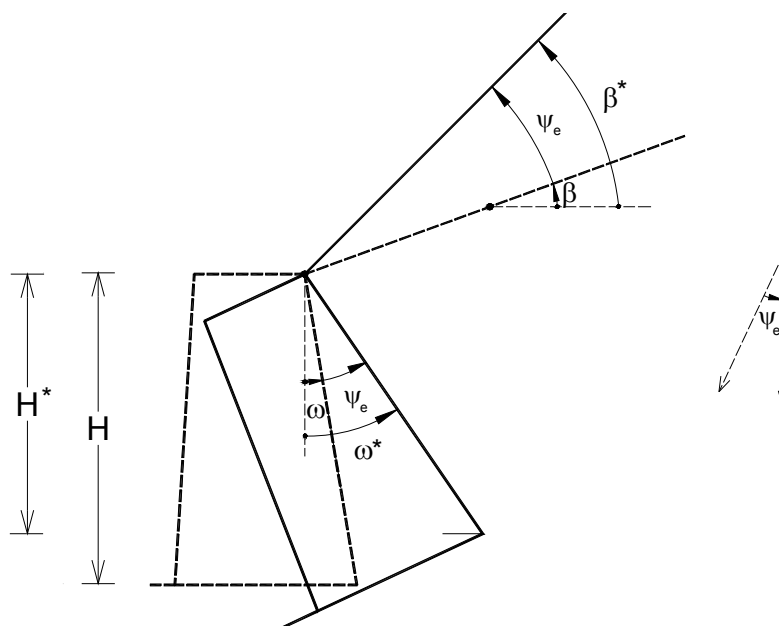


Σχήμα 2.1 Ανάλυση τοίχου βαρύτητας με ασυνεχές πεδίο τάσεων από τους Mylonakis et al., (2007)

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, η αντιστηριζόμενη εδαφική μάζα χωρίζεται νοητικά σε τρεις περιοχές: την περιοχή Α, η βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια του εδάφους, την περιοχή Β η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη της διεπιφάνειας τοίχου-εδάφους (κριτήριο αστοχίας διεπιφάνειας) και μια μεταβατική ζώνη Γ μεταξύ των περιοχών Α και Β. Και στις δύο περιοχές η εδαφική μάζα θεωρείται ότι βρίσκεται σε κατάσταση επικείμενης διαρροής, δηλαδή ότι ικανοποιείται οριακά χωρίς να παραβιάζεται το κριτήριο αστοχίας. Η ίδια υπόθεση ισχύει και για τη διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους, η οποία υπόκειται σε δράσεις επαφής. Με βάση τη θεωρία των ασυνεχών τασικών πεδίων, οι τάσεις στις δύο αυτές διακριτές περιοχές ισορροπούν μεταξύ τους, πάνω σε μία ή περισσότερες ασυνέχειες

τάσεων. Στην παρούσα ανάλυση χρησιμοποιείται στη ζώνη μετάβασης ένα ριπίδιο τάσεων εκθετικής μορφής, το οποίο είναι αρκετά συνηθισμένο σε προβλήματα γεωτεχνικής μηχανικής, αν και προσεγγιστικό όταν συμπεριλαμβάνεται στην ανάλυση το βάρος του εδάφους (Prandtl, 1920; Reissner, 1924).

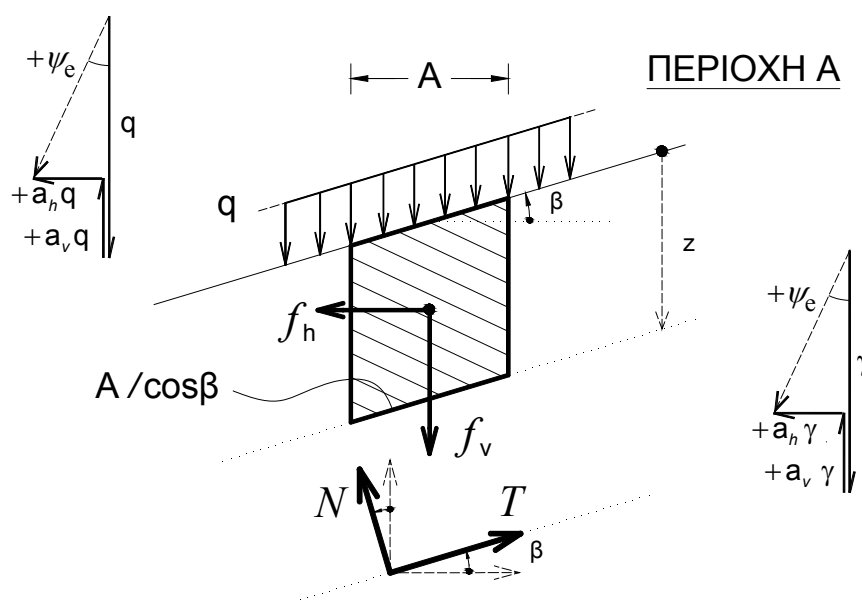
Στη πρωτότυπη μορφή της λύσης (Κλουκίνας, 2006; Mylonakis et al., 2007) το σεισμικό πρόβλημα προκύπτει από το αντίστοιχο βαρυντικό, με τη χρήση του ακόλουθου μετασχηματισμού: από τη στιγμή που η σεισμική δράση λαμβάνεται να ενεργεί ψευδοστατικά και ομοιόμορφα στην εδαφική μάζα, υπό σταθερή γωνία ψ_e από την κατακόρυφη, είναι προφανές πως το σεισμικό πρόβλημα δε διαφέρει ουσιαστικά από το στατικό, καθώς το πρώτο ταυτίζεται με το δεύτερο μέσω περιστροφής του συστήματος αναφοράς κατά τη γωνία ψ_e όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2. Με άλλα λόγια η σεισμική γωνία ψ_e δεν αποτελεί μια πρόσθετη φυσική παράμετρο του προβλήματος, παρά μόνο μεταβάλλει τις τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων, εκτός φυσικά από τις παραμέτρους αντοχής ϕ και δ . Αυτή η συμμετρία φαίνεται ότι χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Briske (1927) και αργότερα από τους Terzaghi (1943) και Arango (Seed & Whitman, 1967) για την επίλυση συναφών προβλημάτων.



Σχήμα 2.2 Μετασχηματισμός ομοιότητας μεταξύ βαρυντικού και σεισμικού προβλήματος

Στην παρούσα εργασία η διαδικασία επαναλαμβάνεται για την απευθείας ανάλυση του σεισμικού προβλήματος, καθώς με το συγκεκριμένο τρόπο αίρονται ορισμένοι θεωρητικοί περιορισμοί στη χρήση της λύσης, όπως η θεώρηση σταθερής σεισμικής

γωνίας ψ_e . Επίσης ο τανυστής των τάσεων με σεισμό επιτρέπει την ασφαλέστερη εξαγωγή χρήσιμων σχέσεων και μεγεθών τα οποία δεν προκύπτουν με την μέθοδο της ομοιότητας και θα φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Η προσθήκη της σεισμικής δράσης στην ανάλυση της στατικής ισορροπίας των τάσεων οδηγεί στην τροποποιημένη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας του εδάφους που απεικονίζεται στο Σχ. 2.3. Η συνθήκη του απειρομήκους πρηνούς θεωρείται μια καλή προσέγγιση για τον προσδιορισμό των τάσεων στην περιοχή A (Mylonakis et al. 2007; Lancelotta, 2007; Evangelista, 2010). Σε αυτήν την περίπτωση, στο γραμμοσκιασμένο εδαφικό πρίσμα ενεργούν οι δυνάμεις πεδίου και οι αντιδράσεις των τάσεων επαφής στη βάση του πρίσματος. Η επιφόρτιση θεωρείται ότι αποκρίνεται με τον ίδιο τρόπο ως μια βολική αλλά μη απαραίτητη υπόθεση.



Σχήμα 2.3 Ισορροπία απειρομήκους πρηνούς για γενικευμένη φόρτιση με σεισμό

Η ορθή και η διατμητική τάση στη βάση του κεκλιμένου πρηνούς δίνονται από τις Εξ.(2.1) και (2.2), οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας για την περίπτωση θετικής σεισμικής γωνίας ψ_e που αντιστοιχεί στην ενεργητική κατάσταση. Οι ίδιες εκφράσεις ισχύουν και για την παθητική περίπτωση, για αρνητικό ψ_e . Ο λόγος διατμητικών/ορθών τάσεων τ_β/σ_β είναι σταθερός, ίσος με $\tan(\beta+\psi_e)$ σε όλα τα βάθη. Επίσης, από τις εξισώσεις φαίνεται ότι τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο βάθος υπόκεινται σε ίση φόρτιση. Λόγω της αντισυμμετρικότητας του προβλήματος, οι παραδοχές αυτές είναι ασυμπτωτικά ακριβείς μακριά από τον τοίχο.

$$\sigma_{\beta} = \frac{N}{A/\cos \beta} = (\gamma z + q/\cos \beta)(1 - a_v) \cos^2 \beta \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \beta \cos \psi_e} \quad (2.1)$$

$$\tau_{\beta} = \frac{T}{A/\cos \beta} = (\gamma z + q/\cos \beta)(1 - a_v) \cos^2 \beta [\tan \beta + \tan \psi_e] \quad (2.2)$$

όπου $N = f_h \cos \beta - f_v \sin \beta$ και $T = f_h \sin \beta + f_v \cos \beta$, ενώ $f_h = (\gamma z + q/\cos \beta) A a_h$ και $f_v = (\gamma z + q/\cos \beta) A (1 - a_v)$ είναι η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα των δυνάμεων πεδίου.

Θεωρώντας ότι το εδαφικό μέσο στην περιοχή Α βρίσκεται σε κατάσταση επικείμενης διαρροής, οι κύκλοι Mohr των τάσεων στην αστοχία απεικονίζονται στο Σχ. 2.4. Στο Σχήμα είναι εμφανείς οι διαφορετικές θέσεις του σημείου (σ_{β} , τ_{β}) στην ενεργητική και παθητική κατάσταση και οι διαφορετικοί προσανατολισμοί των κυρίων επιπέδων. Από τη γεωμετρία του κύκλου, η γνωστή ορθή τάση σ_{β} και οποιαδήποτε ορθή τάση σ_{θ} που ενεργεί σε τυχαίο επίπεδο με κλίση θ ως προς την κατακόρυφη, σχετίζονται με τη μέση τάση $S_A = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$\sigma_{\beta} = S_A [1 + \sin \varphi \cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)] \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\theta} = S_A [1 - \sin \varphi \cos(\Delta_{2\theta} - \delta_{\theta})] = S_A [1 - \sin \varphi \cos(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e + 2\theta)] \quad (2.4)$$

όπου $\Delta_{1e} = \sin^{-1} [\sin(\beta + \psi_e)/\sin \varphi]$ και $\Delta_{2e} = \sin^{-1} [\sin(\beta + \psi_e)/\sin \varphi]$ οι βοηθητικές γεωμετρικές γωνίες που φέρουν το όνομα του Caquot (Levy, 1873; Boussinesq, 1876; Caquot, 1934; Caquot & Kerisel, 1948; Sokolovskii, 1965), ενώ με δ_{θ} συμβολίζεται η κλίση της ώθησης στο τυχαίο επίπεδο θ που υπολογίζεται από τη γεωμετρία του κύκλου.

Η κλίση του μέγιστου κύριου επιπέδου ως προς την οριζόντια δίνεται από την Εξ.(2.5). Όλες οι εξισώσεις ισχύουν και για τις παθητικές ωθήσεις χωρίς την ανάγκη διπλών προσήμων, καθώς είναι πλήρως συμμετρικές και μεταπίπτουν στην παθητική κατάσταση με κατάλληλη προσήμανση των γωνιών φ και ψ_e (για αρνητικές τιμές)

$$\theta_{Ae} = (\Delta_{1e} - \beta + \psi_e)/2 \quad (2.5)$$

προστίθεται και η σεισμική δράση, όπως έχουν αποδείξει οι Κλουκίνας & Μυλωνάκης (2010), Kloukinas & Mylonakis (2011) και οι Evangelista et al. (2010). Τέλος, βασισμένοι στο συγκεκριμένο τανυστή έχει πρόσφατα παρουσιαστεί γενίκευση της λύσης του Chu (1991) για κεκλιμένο επίπεδο και σεισμική δράση (Iskander et al., 2013).

Οι λύσεις Rankine που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο θεωρούν ότι το υπολογιστικό επίπεδο θ μπορεί να αντιστοιχεί σε μια πραγματική διεπιφάνεια τοίχου εδάφους, πάνω στην οποία η ώθηση ενεργεί με κινητοποιούμενη κλίση δ_θ , διαφορετική εν γένει από την πραγματική της τραχύτητα. Ωστόσο αυτό γενικώς δεν ισχύει καθώς η διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους είναι στην πραγματικότητα μια επιφάνεια ολίσθησης, όπως αποδεικνύεται πειραματικά και αριθμητικά. Αυτό συνεπάγεται μια δεύτερη συνοριακή συνθήκη που είναι ακριβής κοντά στον τοίχο και υπακούει στο κριτήριο αστοχίας της διεπιφάνειας, $\tau_w = \sigma_w \tan \delta_w$, όπου σ_w και τ_w η ορθή και η διατμητική συνιστώσα της ώθησης. Το παραπάνω κριτήριο υποδηλώνει ότι η μέγιστη κλίση που μπορεί να λάβει η ώθηση είναι ίση με τη φυσική τραχύτητα δ_w , με την προϋπόθεση ότι έχει αναπτυχθεί αρκετή διατμητική παραμόρφωση ώστε να κινητοποιηθεί πλήρως η διατμητική αντίσταση της διεπιφάνειας. Πειραματικές εργασίες από τους James & Bransby (1970), Sherif et al. (1982), και Fang & Ishibashi (1986) έδειξαν ότι η κορυφαία τιμή της γωνίας τριβής δ_w αναπτύσσεται πιο γρήγορα από την αντίστοιχη εσωτερική τριβή του εδάφους ϕ , και συνήθως ομοιόμορφα κατά μήκος του τοίχου (Chang, 1997) με μικρή εξαίρεση μια ζώνη κοντά στη βάση, ειδικά όταν η αστοχία του τοίχου περιλαμβάνει και περιστροφή (James & Bransby, 1970; Potts & Fourier, 1986; Shiau et al., 2008). Αυτό σημαίνει ότι μια λύση Rankine είναι εφικτή μόνο αν η θεωρητική κινητοποιούμενη τιμή δ_θ ταυτίζεται με την πραγματική τραχύτητα του τοίχου δ_w . Για παράδειγμα, η ώθηση σε έναν κατακόρυφο τοίχο ο οποίος αντιστηρίζει ένα οριζόντιο πρανές ($\beta = 0$), είναι οριζόντια μόνο αν ο τοίχος είναι λείος ($\delta_w = 0$). Με την ίδια λογική, η λύση Rankine για κεκλιμένο πρανές υπό γωνία β , ισχύει αν η τραχύτητα του τοίχου είναι ίση με $\delta_w = \beta$. Η φυσική σημασία αυτής της συνοριακής συνθήκης φαίνεται ότι έγινε πρώτα αντιληπτή από τους Levy (1873), Saint-Venant (1870) και Boussinesq (1876) οι οποίοι διατύπωσαν προϋποθέσεις για την ισχύ της λύσης Rankine.

Επιπλέον, η διατμητική αστοχία της διεπιφάνειας καθορίζει τη φορά της διατμητικής συνιστώσας, η οποία προκύπτει με κινηματικά κριτήρια, παρά το γεγονός ότι η οριακή ανάλυση τάσεων δεν ξεετάζει άμεσα την κινηματική του μηχανισμού αστοχίας (Mylonakis et al. 2007). Συγκεκριμένα, η διατμητική τάση έχει πάντοτε την ίδια φορά με το διάνυσμα

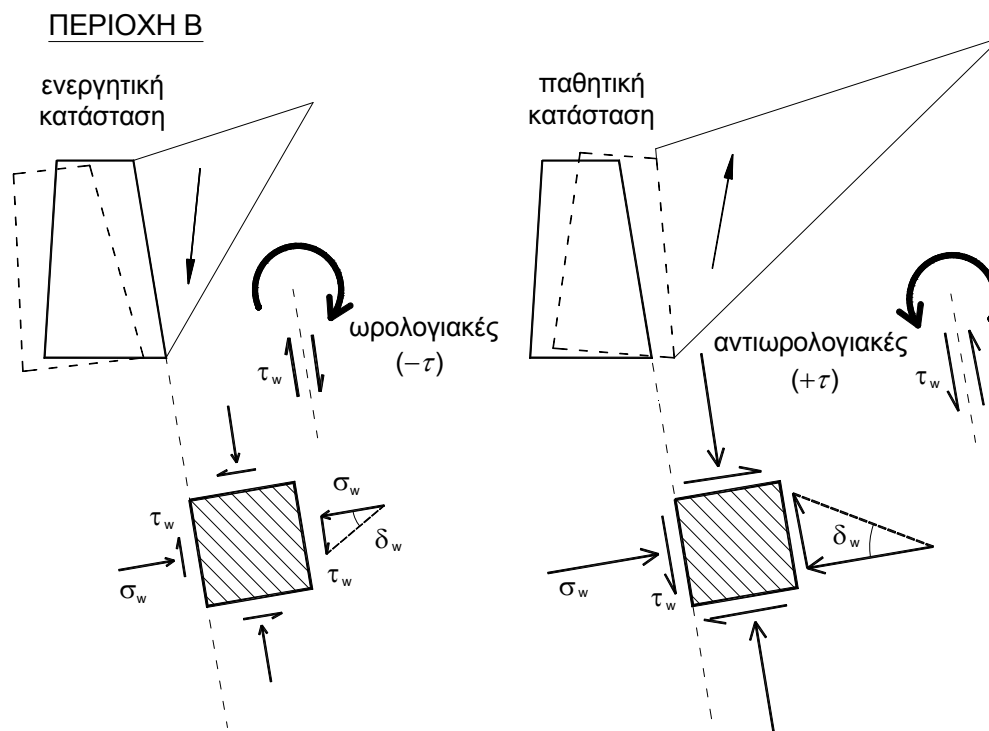
της μετακίνησης του αντιστηριζόμενου εδαφικού πρίσματος, που είναι προφανώς διαφορετική στην ενεργητική και στην παθητική κατάσταση (κίνηση πρίσματος προς τα κάτω και πάνω αντίστοιχα), όπως φαίνεται στο Σχ. 2.5.

Αυτή η θεωρούμενη κινηματική του προβλήματος έχει επιβεβαιωθεί από πειραματικά ευρήματα δοκιμών σεισμικής τράπεζας και φυγοκεντριστή (James & Bransby, 1970; 1971; Fang et al., 1994; Bolton & Powrie, 1987; Nakamura, 2006) και από αποτελέσματα αριθμητικών αναλύσεων (Potts & Fourier, 1986; Shiao et al., 2008). Η διαφορετική κινηματική οδηγεί σε διαφορετικές θέσεις του τασικού σημείου πάνω στον κύκλο Mohr στην ενεργητική και παθητική περίπτωση, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.6.

Από τον κύκλο Mohr του Σχ. 2.6, η ορθή ενεργητική τάση σ_w (παθητική για αρνητικά ϕ και δ_w) σχετίζεται με τη μέση τάση S_B μέσω της Εξ. (2.6), ενώ η διεύθυνση του μέγιστου κύριου επίπεδου, ως προς την οριζόντια δίνεται από την Εξ. (2.7). Όπως και προηγουμένως, $\Delta_2 = \sin^{-1}(\sin \delta_w / \sin \phi)$ είναι η αντίστοιχη βοηθητική γωνία Caquot

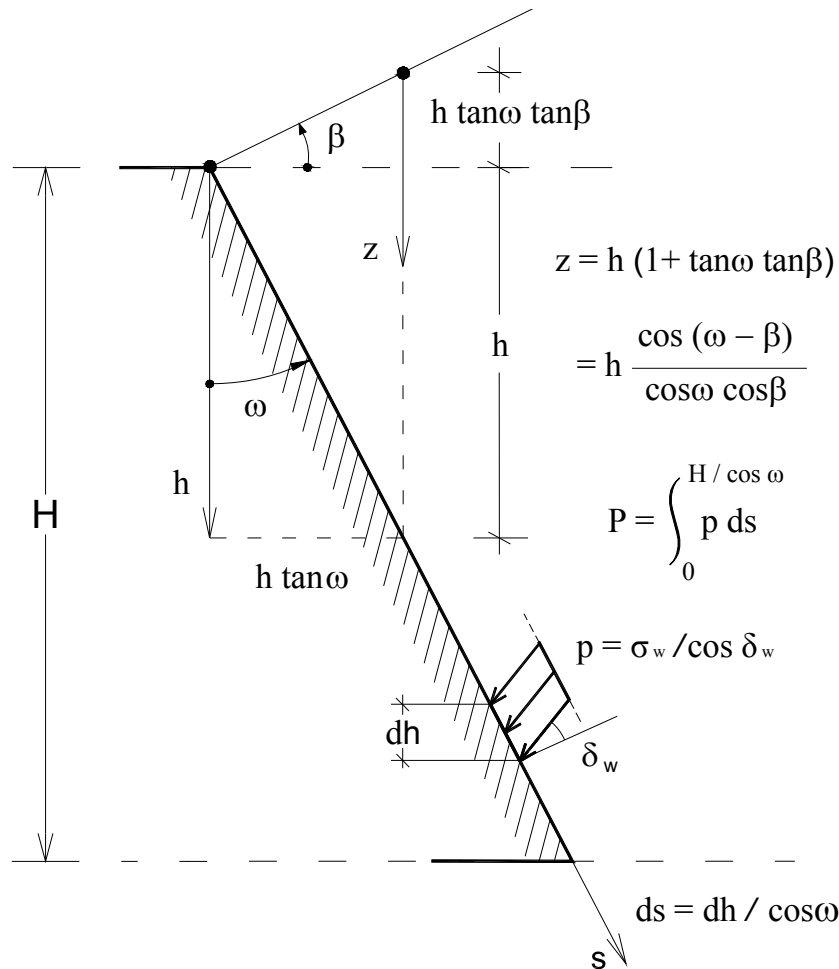
$$\sigma_w = S_B [1 - \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w)] \tag{2.6}$$

$$\theta_B = (\Delta_2 - \delta_w) / 2 + \omega \tag{2.7}$$



Σχήμα 2.5 Επίδραση των κινηματικών συνθηκών στον προσανατολισμό των τάσεων επαφής κατά τη διατμητική αστοχία της διεπιφάνειας τοίχου – εδάφους

Συνδυάζοντας τις Εξ. (2.1), (2.3), (2.6) και (2.9) και ολοκληρώνοντας τη συνισταμένη τάση επαφής κατά μήκος του τοίχου, σύμφωνα με την αλλαγή των μεταβλητών που απεικονίζεται στο Σχ. 2.7 (Chu, 1991), εξάγεται η γνωστή σχέση για την οριακή ενεργητική ή παθητική ώθηση (Ebeling & Morison, 1992; Kramer, 1996)



Σχήμα 2.7 Ολοκλήρωση των τάσεων επαφής κατά μήκος του τοίχου

$$P_E = K_{qE} (1 - a_v) q H + \frac{1}{2} K_{\gamma E} (1 - a_v) \gamma H^2 \tag{2.10}$$

όπου

$$K_{\gamma E} = \frac{\cos(\omega - \beta) \cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e \cos \delta_w \cos^2 \omega} \left[\frac{1 - \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w)}{1 + \sin \phi \cos[\Delta_{1e} + \beta + \psi_e]} \right] \exp(-2\theta_{AB} \tan \phi) \tag{2.11}$$

$$K_{qE} = K_{\gamma E} \cos \omega / \cos(\omega - \beta) \tag{2.12}$$

Οι εκφράσεις K_{qE} και $K_{\gamma E}$ εκφράζουν τους συντελεστές εδαφικών ωθήσεων λόγω επιφόρτισης και ιδίου βάρους αντίστοιχα. Οι Εξ. (2.10) - (2.12) είναι απολύτως συμμετρικές, που σημαίνει ότι παρέχουν τόσο την ενεργητική όσο και την παθητική ώθηση με κατάλληλη προσήμανση (θετικά δ_w , φ , ψ_e για την ενεργητική κατάσταση, αρνητικά για την παθητική) (Mylonakis et al., 2007). Σημειώνεται ότι η λύση του Lancelotta (2002, 2007) είναι ισοδύναμη με την παρούσα, αλλά περιορίζεται στην περίπτωση κατακόρυφου τοίχου με οριζόντιο επίχωμα χωρίς επιφόρτιση ($\omega = \beta = 0$, $q = 0$). Η λύση που παρουσίασε ο Powrie (1997) περιορίζεται σε ενεργητικές ωθήσεις χωρίς επιφόρτιση και επιπλέον παρουσιάζει ορισμένα αλγεβρικά σφάλματα κατά τη διαδικασία της ολοκλήρωσης των ωθήσεων (Mylonakis et al., 2007).

2.2.2 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και επεκτάσεις της λύσης

Η προτεινόμενη λύση είναι απλούστερη από τις κλασικές εξισώσεις Coulomb και Mononobe – Okabe, και επιπλέον είναι πλήρως συμμετρική, το οποίο την απαλλάσσει από την ανάγκη διπλού συμβολισμού για ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις. Τα κύρια χαρακτηριστικά των μαθηματικών όρων της λύσης, συμπεριλαμβανομένων των προσήμων, μπορούν να εξαχθούν από φυσική θεώρηση σε αντίθεση με τις κλασικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα, βάσει των Εξ. (2.11) και (2.12) είναι ο γνωστός λόγος Rankine $(1 - \sin\varphi) / (1 + \sin\varphi)$. Οι όροι $\cos(\Delta_2 - \delta_w)$ και $\cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)$ στον αριθμητή και παρανομαστή αντανακλούν το γεγονός ότι οι τάσεις σ_β και σ_w δεν είναι κύριες, και διατηρούν το ίδιο πρόσημο με τον όρο τον οποίο πολλαπλασιάζουν. Επίσης, πολύ λογικά ο όρος $\cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)$ πρέπει να βρίσκεται στον παρανομαστή, καθώς η αύξηση των γωνιών β και ψ_e (άρα και της γωνία Caquot Δ_{1e}) πρέπει να οδηγεί σε αύξηση της ενεργητικής ώθησης. Αναφορικά με τους όρους που βρίσκονται έξω από τις αγκύλες, ο εκθετικός όρος είναι ευκολομνημόνευτος και ακολουθεί την προσήμανση του αριθμητή, ο συντελεστής $\cos\delta_w = (1 + \tan\delta_w)^{1/2}$ προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των τάσεων επαφής πάνω στη διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους, και ο όρος $\cos\beta$ (αρχικά $\cos^2\beta$) πηγάζει από την ισορροπία του πρανούς μέσω της Εξ. (2.1). Τέλος, ο όρος $\cos(\omega - \beta)/\cos^2\omega$ (αρχικά $\cos(\omega - \beta)/\cos\omega\cos\beta$) είναι καθαρά γεωμετρικός και σχετίζεται με την κλίση του τοίχου και του πρανούς όπως φαίνεται από την αλλαγή των μεταβλητών κατά την ολοκλήρωση (Σχ. 2.7).

Ως προς την ακρίβεια και αξιοπιστία της προτεινόμενης λύσης, εκτεταμένες συγκρίσεις με καθιερωμένες λύσεις από τη βιβλιογραφία υποδεικνύουν πως είναι πάντοτε

ασφαλής, καθώς υπερεκτιμά τις ενεργητικές ωθήσεις και υποεκτιμά τις παθητικές (Κλουκίνας, 2006; Mylonakis et al., 2007). Αυτό καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα ελκυστική για πρακτικές εφαρμογές. Στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων, η ακρίβεια της λύσης είναι εξαιρετική (μέγιστη απόκλιση στις αριθμητικές συγκρίσεις περίπου 10%). Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις σημειώνονται για υψηλές σεισμικές επιταχύνσεις, υψηλές γωνίες τριβής, μεγάλες κλίσεις πρανούς και αρνητική κλίση τοίχου. Για την περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, οι προβλέψεις της μεθόδου έχουν μεγαλύτερο σφάλμα, αλλά είναι επίσης ικανοποιητικές, καθώς βελτιώνουν σημαντικά τις προβλέψεις των μεθόδων Coulomb και Mononobe – Okabe. Γενικά, λόγω της προσεγγιστικής φύσης του εκθετικού ριπιδίου των τάσεων, η ακρίβεια της Εξ. (2.9) βελτιώνεται όσο μικραίνει η γωνία θ_{AB} της μεταβατικής ζώνης. Η περιστροφή των κυρίων επιπέδων και των χαρακτηριστικών των τάσεων οδηγεί σε καμπυλωμένες επιφάνειες αστοχίας, οι οποίες είναι κυρτές για $\theta_{AB} > 0$ και κοίλες για $\theta_{AB} < 0$, για τις οποίες περιπτώσεις η λύση θεωρητικά δεν ισχύει.

Τέλος, η έκφραση της λύσης με όρους τάσεων παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο για τον υπολογισμό κατανομών ωθήσεων, κάτι που δεν ισχύει στις κινηματικές λύσεις. Το συγκεκριμένο πλεονέκτημα αποδεικνύεται εξαιρετικά σημαντικό για την διερεύνηση περιπτώσεων που οδηγούν σε κατανομές ωθήσεων που διαφέρουν από την τριγωνική, όπως αυτές που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3.

2.2.3 Ειδικές περιπτώσεις γενικευμένου πεδίου τάσεων Rankine

Όπως προαναφέρθηκε, η στατική ισορροπία των τάσεων στο αντιστηριζόμενο έδαφος περιγράφεται συνήθως μέσω ασυνεχών πεδίων τάσεων, καθότι οι συνοριακές συνθήκες των τάσεων στην ελεύθερη επιφάνεια και στον τοίχο είναι εν γένει διαφορετικές. Επομένως η εφαρμογή λύσεων τύπου Rankine (Rankine, 1857; Chu, 1991; Greco, 1997; 1999; Budhu, 2000; Iskander et al., 2013), οι οποίες προκύπτουν από το πεδίο τάσεων της περιοχής του επιχώματος και αγνοούν τη συνοριακή συνθήκη τραχύτητας στον τοίχο, είναι εν γένει λάθος, εκτός από ειδικές μόνο περιπτώσεις οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια για γενικευμένες συνθήκες βαρυτικής και σεισμικής φόρτισης.

Η περιγραφή του προβλήματος με ένα ομοιόμορφο πεδίο τάσεων είναι δυνατή στην ειδική περίπτωση όπου μηδενίζεται η γωνία θ_{AB} η οποία διαχωρίζει τις δύο περιοχές Α και Β. Στην περίπτωση αυτή τα δύο πεδία συμπίπτουν στον τανυστή που αναπαριστάται γραφικά στο Σχ. 2.8 για ενεργητικές και παθητικές συνθήκες.

Από τους κύκλους Mohr είναι φανερό ότι η κατάσταση αυτή είναι πιο εύκολα εφικτή στην ενεργητική περίπτωση, ενώ στην παθητική που η γωνία θ_{AB} είναι μεγαλύτερη μπορεί να ισχύει για αρνητική γωνία πρανούς ή για ασυνήθιστα μεγάλη κλίση του τοίχου. Η μαθηματική έκφραση της απαραίτητης συνθήκης από την Εξ. (2.8), είναι

$$(\Delta_2 - \delta_w) - (\Delta_{1e} - \beta) - 2\omega - \psi_e = 0 \quad (2.13)$$

η οποία προφανώς ικανοποιείται από άπειρους συνδυασμούς των πέντε παραμέτρων που ορίζουν το πρόβλημα (ϕ , δ_w , ω , β και ψ_e). Ανάμεσά τους, ως ειδικές περιπτώσεις, προκύπτουν οι κλασικές λύσεις της βιβλιογραφίας $\delta_w = \omega = \beta = \psi_e = 0$ and $\delta_w = \beta$, $\omega = \psi_e = 0$. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει η συνθήκη (2.13), η προσεγγιστική λύση (2.11) μεταπίπτει σε ακριβή εξίσωση Rankine για το γενικευμένο πρόβλημα, που παρουσιάζεται σε δύο εναλλακτικές μορφές στις Εξ. (2.14 α, β). Η δεύτερη μορφή προκύπτει από την αντικατάσταση του όρου $\Delta_2 - \delta_w$ στον αριθμητή μέσω της Εξ.(2.13), ώστε να απλοποιηθούν περαιτέρω οι παράμετροι που εμπλέκονται στην εξίσωση.

$$K_\gamma = \frac{\cos(\omega - \beta) \cos(\beta + \psi_e)}{\cos \delta_w \cos^2 \omega \cos \psi_e} \left[\frac{1 - \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w)}{1 + \sin \phi \cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)} \right] \quad (2.14\alpha)$$

$$K_\gamma = \frac{\cos(\omega - \beta) \cos(\beta + \psi_e)}{\cos \delta_w \cos^2 \omega \cos \psi_e} \left[\frac{1 - \sin \phi \cos(\Delta_{1e} - \beta + 2\omega + \psi_e)}{1 + \sin \phi \cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)} \right] \quad (2.14\beta)$$

Στην περίπτωση των κλασικών λύσεων $\delta_w = \omega = \beta = \psi_e = 0$ και $\delta_w = \beta$, $\omega = \psi_e = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται αντίστοιχες των κλασικών συντελεστών Rankine (1857). Η Εξ. (2.14β) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή της Εξ. (2.15), η οποία μοιάζει με τις εξισώσεις που παρουσίασαν οι Caquot & Kerisel (1948); Costet & Sanglerat (1975) και Soubra (2000) για βαρυντική φόρτιση. Επίσης, στις προαναφερθείσες εργασίες παρουσιάζεται μόνο ο συντελεστής $k = \sigma_w / \gamma z$ χωρίς να επιχειρείται ολοκλήρωση των τάσεων επαφής κατά μήκος του τοίχου. Αυτή πραγματοποιείται μόνο στη λύση του Chu (1991), η οποία καταλήγει σε πιο περίπλοκο μαθηματικό τύπο, με χρήση τετραγωνικών ριζών, κάτι που στερεί τη δυνατότητα συμμετρίας στη λύση (αλλαγή από ενεργητικές ωθήσεις σε παθητικές με αλλαγή προσίμων στις τιμές ϕ και δ). Η Εξ. (2.15) είναι μάλλον απλούστερη

από την (2.14), έχει όμως το μειονέκτημα ότι γίνεται απροσδιόριστη για οριζόντιο πρανές υπό βαρυντική φόρτιση ($\beta = \psi_e = 0$).

$$K_\gamma = \frac{\cos(\omega - \beta) \sin \Delta_{1e}}{\cos \delta_w \cos^2 \omega \cos \psi_e} \frac{[1 - \sin \phi \sin(\Delta_{1e} - \beta + 2\omega + \psi_e)]}{\sin(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)} \quad (2.15)$$

Η Εξ. (2.13) που εκφράζει τη συνθήκη γενικευμένης κατάστασης Rankine μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά ως προς οποιαδήποτε από τις πέντε παραμέτρους του προβλήματος (Κλουκίνας, 2012) καταλήγοντας στην κρίσιμη τιμή της κάθε παραμέτρου που ικανοποιεί τη συγκεκριμένη συνθήκη συναρτήσει των υπολοίπων.

κρίσιμη κλίση τοίχου:

$$\omega_R = \frac{1}{2} [(\Delta_2 - \delta_w) - (\Delta_{1e} - \beta) - \psi_e] \quad (2.16\alpha)$$

κρίσιμη τραχύτητα τοίχου:

$$\delta_R = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \phi \sin(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e + 2\omega)}{1 - \sin \phi \cos(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e + 2\omega)} \right] \quad (2.16\beta)$$

κρίσιμη κλίση πρανούς:

$$\beta_R = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \phi \sin(\Delta_2 - \delta_w - 2\omega - 2\psi_e)}{1 - \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w - 2\omega - 2\psi_e)} \right] - \psi_e \quad (2.16\gamma)$$

κρίσιμη σεισμική γωνία:

$$\psi_{eR} = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \phi \sin(\Delta_2 - \delta_w - 2\omega + 2\beta)}{1 + \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w - 2\omega + 2\beta)} \right] - \beta \quad (2.16\delta)$$

κρίσιμη γωνία εσωτερικής τριβής:

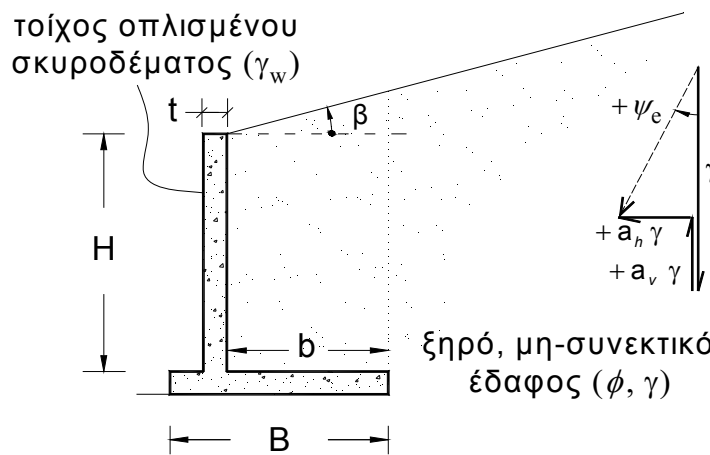
$$\phi_R = \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{\sin^2 \delta_w + \sin^2(\beta + \psi_e) - 2 \sin \delta_w \sin(\beta + \psi_e) \cos(\delta_w - \beta + \psi_e + 2\omega)}}{\sin(\delta_w - \beta + \psi_e + 2\omega)} \right] \quad (2.16\epsilon)$$

Ορισμένες από τις παραπάνω εξισώσεις έχουν δημοσιευτεί στο παρελθόν σε διαφορετική μορφή και μόνο για βαρυντικές ωθήσεις. Η πρώτη διερεύνηση του γενικευμένου πεδίου Rankine έγινε από τους Levy (1873), Saint-Venant (1870) και Considere (1870) οι οποίοι κατάληξαν σε μια απλοποιημένη μορφή της Εξ. (2.16α) και πρότειναν την κατασκευή των τοίχων με κατάλληλη κλίση ώστε να ισχύει η λύση του Rankine, από τη στιγμή που η τραχύτητα της διεπιφάνειας είναι διαφορετική από την απαιτούμενη (Heyman, 1972, βλ. Κεφάλαιο 4). Για την απλή βαρυντική φόρτιση οι Εξ. (2.16α) και (2.16β) έχουν δημοσιευτεί από αρκετούς ερευνητές όπως οι Caquot & Kerisel (1948), Costet & Sanglerat (1975) και Chu (1991). Η τελευταία λύση όμως δε χειρίζεται τα αποτελέσματα της εξίσωσης σαν απαιτούμενες, αλλά σαν «κινητοποιούμενες» τιμές που ενεργούν στην επιφάνεια του τοίχου, ανεξάρτητα από την πραγματική γωνία τριβής της, δ_w (Budhu, 2007). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ανάλυσή του Chu να παραβιάζει το κριτήριο αστοχίας της διεπιφάνειας και να είναι πολλές φορές μη συμβατή με την κινηματική του μηχανισμού αστοχίας, προβλεποντας μη ρεαλιστικές τιμές δ_R , ειδικά για την παθητική κατάσταση Rankine.

2.2.4 Εφαρμογή της γενικευμένης θεωρίας Rankine στην περίπτωση των τοίχων-προβόλων

Σύμφωνα με τα ευρήματα της προηγούμενης ενότητας, η γενικευμένη κατάσταση Rankine στην περίπτωση των συμβατικών τοίχων βαρύτητας ισχύει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, ενώ η χρήση αυτής της παραδοχής μπορεί να οδηγήσει σε πολύ συντηρητικά κάτω όρια για μεγάλο αριθμό προβλημάτων. Αντίθετα, στην περίπτωση των τοίχων προβόλων με πεπλατυσμένη βάση (σχήματος L ή τοίχοι «ημιβαρύτητας»), η θεωρία Rankine μπορεί να έχει ευρεία εφαρμογή. Οι επιπλέον παράμετροι του προβλήματος απεικονίζονται στο Σχ. 2.9 και είναι το εσωτερικό πλάτος του πέλματος b και το συνολικό πλάτος της πλάκας θεμελίου B . Για τον θέματα σχεδιασμού είναι επίσης σημαντικά το πάχος του τοίχου, t και το ειδικό βάρος του υλικού κατασκευής του τοίχου, γ_w .

Οι συγκεκριμένος τύπος τοίχων αντιστήριξης είναι αρκετά διαδεδομένος και θεωρείται ότι πλεονεκτεί έναντι των συμβατικών τοίχων βαρύτητας, καθώς συνδυάζει την οικονομία με την ευκολία στην κατασκευή και τοποθέτηση. Η βασική ιδέα του συγκεκριμένου σχεδιασμού είναι ότι εκμεταλλεύεται το βάρος της ίδιας της εδαφικής μάζας που βρίσκεται πάνω από την πλάκα θεμελίωσης, προκειμένου να αποκτά μεγαλύτερη ευστάθεια, τόσο σε ολίσθηση όσο και σε περιστροφή.



Σχήμα 2.9. Το πρόβλημα ενός τοίχου προβόλου σχήματος L ο οποίος αντιστηρίζει μη συνεκτικό επίχωμα

Η γενικευμένη κατάσταση Rankine εφαρμόζεται όταν το μήκος του πέλματος είναι αρκετά μεγάλο ώστε οι χαρακτηριστικές των τάσεων από τη ζώνη του επιχώματος δεν τέμνουν τον κορμό του τοίχου (Σχήμα 2.10). Τότε, το εδαφικό πρίσμα αστοχίας ABC σχηματίζεται αποκλειστικά μέσα στο επίχωμα και η διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους δεν αποτελεί η ίδια είναι επιφάνεια ολίσθησης. Αυτό απαλλάσσει το πρόβλημα από τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη και συνεπώς οι τάσεις παντού στο επίχωμα (εκτός της εδαφικής μάζας που παραμένει σε επαφή με τον τοίχο) μπορούν να περιγραφούν από τον τανυστή των τάσεων της ζώνης Rankine του επιχώματος, υπό την απαραίτητη γεωμετρική συνθήκη:

$$\omega_\beta \leq \omega_{wall} = \tan^{-1}(b/H) \tag{2.17}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με το κριτήριο που διατύπωσαν οι Clayton et al. (1993) για το αντίστοιχο βαρυντικό πρόβλημα. Η κλίση ω_β μπορεί να προκύψει είτε γραφικά από τον κύκλο Mohr ή εναλλακτικά και από την Εξ. (2.16α) για $\delta = \phi$ η οποία δίνει:

$$\omega_\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{(\Delta_{1e} - \beta)}{2} - \frac{\psi_e}{2} \tag{2.18}$$

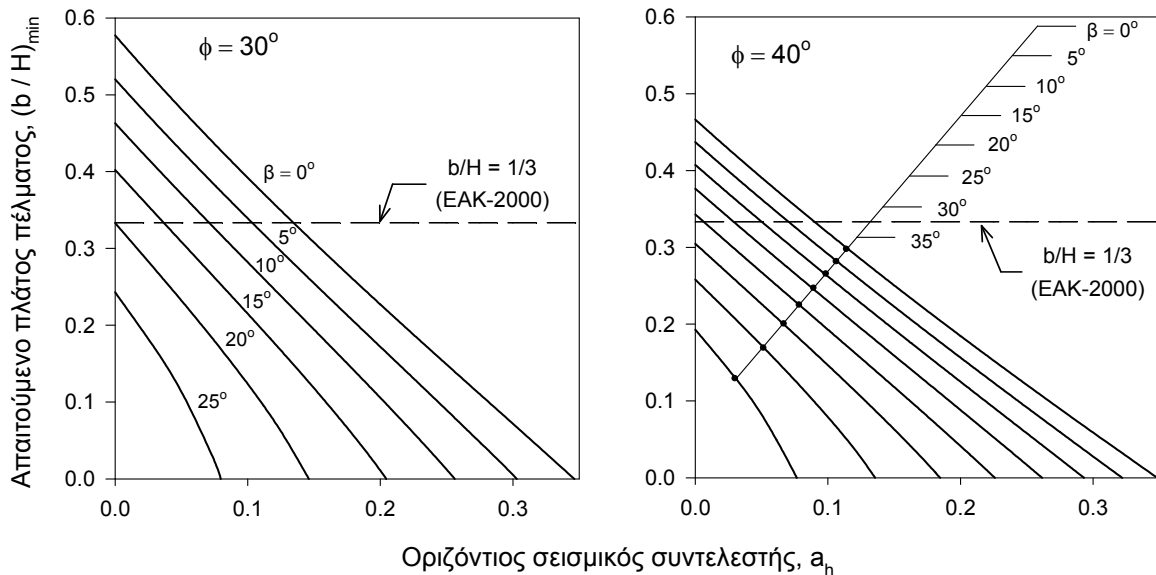
Για την απλή περίπτωση της βαρυντικής φόρτισης ($\psi_e = 0$), η Εξ. (2.18) μπορεί να βρεθεί σε αρκετές δημοσιεύσεις (π.χ., Costet & Sanglerat, 1975; Chu, 1991; Clayton et al., 1993), ενώ η λύση για το σεισμικό πρόβλημα έχει δημοσιευτεί πρόσφατα (Κλουκίνας & Μυλωνάκης, 2010; Evangelista et al., 2010; Kloukinas & Mylonakis, 2011).

Με δεδομένο ότι η κλίση των χαρακτηριστικών μεταβάλλεται με τη σεισμική επιτάχυνση, η γενικευμένη κατάσταση Rankine είναι εφαρμόσιμη στη συντριπτική πλειονότητα των συγκεκριμένων τοίχων, υπό ισχυρή σεισμική δράση. Ακόμα και στην περίπτωση των τοίχων με κοντό πέλμα, οι οποίοι δεν καλύπτουν τη γεωμετρική συνθήκη (2.17), η εφαρμογή της θεωρίας Rankine δίνει ένα μικρό μόνο σφάλμα της τάξης του 5% (Huntington, 1957; Greco, 2001).

Πολλές από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι γνωστές από τη βιβλιογραφία, όπου συχνά χρησιμοποιείται η θεωρία Rankine για την ανάλυση τέτοιων τοίχων, σε συνδυασμό με τη χρήση του νοητού κατακόρυφου επιπέδου AD (Σχ. 2.10α) το οποίο εφάπτεται στο άκρο του πέλματος, για τον υπολογισμό της ώθησης. Αυτό που δεν έχει ερευνηθεί επαρκώς είναι η περίπτωση της σεισμικής φόρτισης και το πως αυτή τροποποιεί τη συμπεριφορά του συστήματος τοίχου-εδάφους. Επίσης, ένα σημείο τριβής στη βιβλιογραφία είναι η κινητοποιούμενη κλίση με την οποία δρα η ώθηση πάνω στο νοητό κατακόρυφο επίπεδο, η οποία μπορεί να κυμαίνεται φυσιολογικά από 0 (τέλεια λείο επίπεδο) έως φ (τέλεια τραχύ επίπεδο). Σε επίπεδο αντισεισμικών κανονισμών, συχνά δεν γίνεται καμία συγκεκριμένη αναφορά στους συγκεκριμένους τοίχους (π.χ. EC8, 2004). Ο Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός (ΕΑΚ-2000, 2003) αναφέρει την περίπτωση των τοίχων προβόλων και προτείνει τον υπολογισμό της ώθησης στο νοητό κατακόρυφο επίπεδο με εφαρμογή των παραδοχών της κλασικής θεωρίας Rankine (βαρυτική φόρτιση), υπό συγκεκριμένες γεωμετρικές συνθήκες. Οι αμερικάνικες προδιαγραφές AASHTO-LRFD (2009) προτείνουν μια διαδικασία ανάλυσης τοίχων που βασίζεται στη χρήση του νοητού κατακόρυφου επιπέδου, η οποία αγνοεί τις προϋποθέσεις και τα συμπεράσματα της θεωρίας Rankine.

Αρχικά, ως προς τις προϋποθέσεις εφαρμογής της λύσης Rankine, παρουσιάζεται στο Σχ. 2.11 η μεταβολή του απαιτούμενου μήκους πέλματος (στη μορφή του αδιάστατου λόγου b/H), ως συνάρτηση της οριζόντιας σεισμικής επιτάχυνσης a_h και της κλίσης του πρανούς β , των παραμέτρων δηλαδή που καθορίζουν την κλίση ω_β (Εξ. 2.18), για δύο περιπτώσεις εδαφών, με $\varphi = 30^\circ$ και $\varphi = 40^\circ$ αντίστοιχα. Επίσης στο γράφημα σημειώνεται η σταθερή τιμή $b > H/3$ που προτείνει ο Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός (ΕΑΚ-2000, 2003). Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι ακόμα και μικρή αύξηση της σεισμικής επιτάχυνσης προκαλεί μεγάλη μείωση του απαιτούμενου πλάτους, με αποτέλεσμα η συνθήκη (2.17) να ικανοποιείται εύκολα υπό σεισμική φόρτιση, ακόμα και αν δεν ικανοποιείται υπό αμιγώς βαρυτικές συνθήκες. Επίσης η αύξηση της γωνίας τριβής

επηρεάζει θετικά τη γεωμετρική συνθήκη, μειώνοντας ελαφρά το απαιτούμενο μήκος. Τέλος, η γεωμετρική συνθήκη του ΕΑΚ-2000, παρότι αυθαίρετη, καλύπτει ένα μεγάλο εύρος περιπτώσεων, εκτός από εκείνες που σχετίζονται με μικρές τιμές της κλίσης β και της σεισμικής επιτάχυνσης a_h .

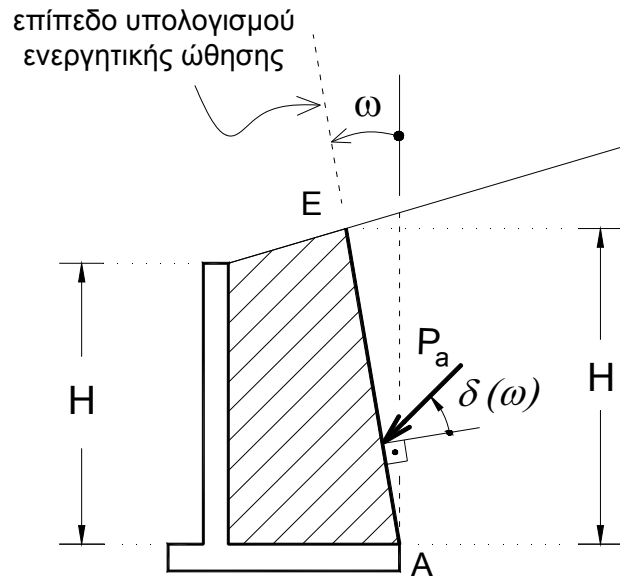


Σχήμα 2.11 Μεταβολή του ελάχιστου απαιτούμενου μήκους πέλματος συναρτήσει της οριζόντιας επιτάχυνσης a_h και της κλίσης του επιχώματος, β , για έδαφος με $\phi = 30^\circ$ και 40°

Για όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες ικανοποιείται η συνθήκη (2.61), η ενεργητική ώθηση μπορεί να υπολογιστεί από την Εξ. (2.14) ή και από την εξίσωση Mononobe - Okabe πάνω σε οποιοδήποτε τυχαίο νοητό επίπεδο ΑΕ, το οποίο έχει κλίση ω από την κατακόρυφη (Σχ. 2.12). Πάνω σε αυτό το επίπεδο, η κλίση της ώθησης $\delta(\omega)$, δίνεται από την Εξ. (2.16β). Η κλίση ω οδηγεί σε ένα τροποποιημένο ύψος H' για το νοητό επίπεδο, το οποίο δίνεται από την Εξ. (2.19).

Επίσης, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνολική ώθηση στον τοίχο, αν συνυπολογιστούν οι αδρανειακές δράσεις στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του Σχ. 2.12, είναι η ίδια για όλους τους αυθαίρετους προσανατολισμούς ω , παρότι εκεί ενεργούν διαφορετική ενεργητική ώθηση P_A και κλίση $\delta(\omega)$ (Κλουκίνας & Μυλωνάκης, 2010; Kloukinas & Mylonakis, 2011). Αν και όλοι αυτοί οι μηχανισμοί είναι στατικός ισοδύναμοι, είναι προτιμότερη η χρήση του κατακόρυφου επιπέδου AD (για $\omega = 0$) ως νοητό επίπεδο, καθώς απλοποιεί τη γεωμετρία και τους υπολογισμούς (Clayton et al.,

1993; Greco, 1999; Trenter, 2004). Επομένως οι Εξ. (2.14) και (2.16β) που δίνουν την ώθηση και την κλίση $\delta(0)$, απλοποιούνται ακόμα περισσότερο και παίρνουν την απλή μορφή των Εξ. 2.20 και 2.21.



Σχήμα 2.12 Εφαρμογή της λύσης Rankine στο γενικευμένο νοητό επίπεδο AE

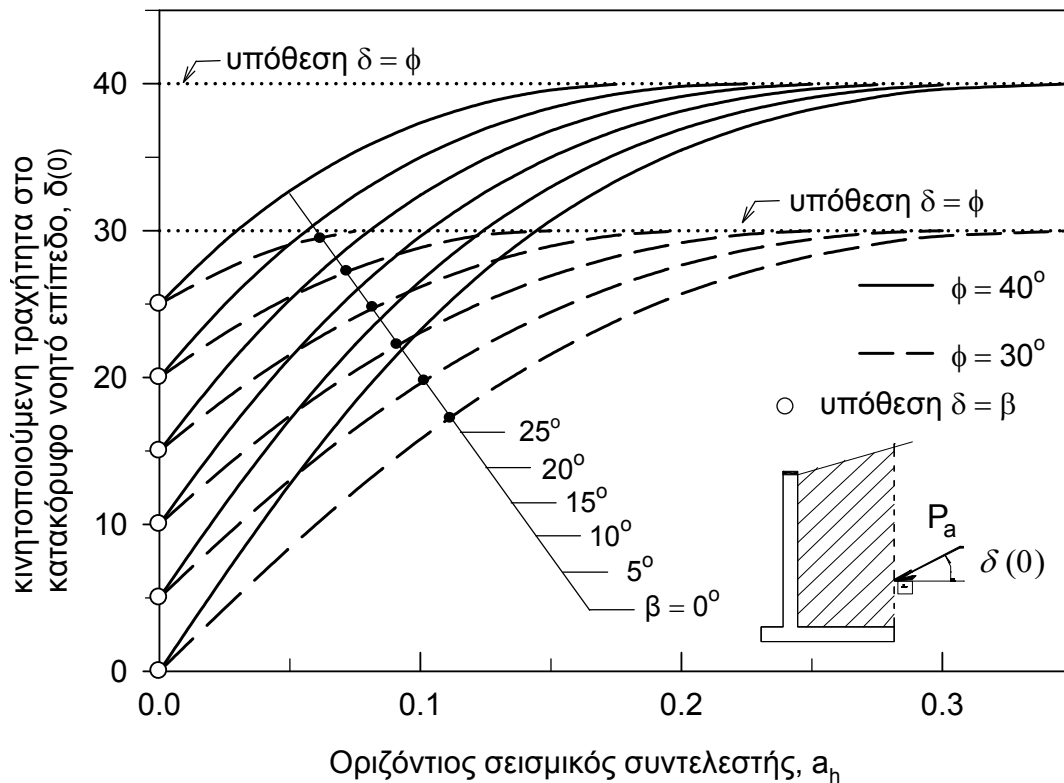
$$H' = H \left[1 + \left(\frac{b}{H} - \tan \omega \right) \frac{\sin \beta \cos \omega}{\cos(\omega - \beta)} \right] \quad (2.19)$$

$$K_{AE} = \frac{\cos \beta \cos(\beta + \psi_e)}{\cos \delta(0) \cos \psi_e} \left[\frac{1 - \sin \phi \cos(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e)}{1 + \sin \phi \cos(\Delta_{1e} + \beta + \psi_e)} \right] \quad (2.20)$$

$$\delta(0) = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \phi \sin(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e)}{1 - \sin \phi \cos(\Delta_{1e} - \beta + \psi_e)} \right] \quad (2.21)$$

Στο Σχ. 2.13, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την κινητοποιούμενη γωνία $\delta(0)$ στο κατακόρυφο επίπεδο AD, σαν συνάρτηση της οριζόντιας σεισμικής επιτάχυνσης και της κλίσης του πρανούς β , για γωνίες τριβής $\phi = 30^\circ$ και 40° . Φυσιολογικά η κλίση αυτή ισούται με τη γωνία β , μόνο για την περίπτωση βαρυτικής φόρτισης ($\psi_e = a_h = 0$). Για όλες τις άλλες περιπτώσεις με σεισμό, η παραδοχή του ΕΑΚ-2000 ($\delta = \beta$) είναι συντηρητική,

καθώς η εφαρμογή της ώθησης με αυξημένη κλίση $\delta(0)$ βελτιώνει την ευστάθεια του τοίχου, μειώνοντας την οριζόντια συνιστώσα και αυξάνοντας την κατακόρυφη. Αντίθετα, σχεδόν πάντοτε μη-συντηρητική είναι η (επίσης λανθασμένη) παραδοχή $\delta = \varphi$ που εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία, βασισμένη στην απλοϊκή υπόθεση της επαφής «εδάφους με έδαφος» (BS8002, 1994; Trenter, 2004; O’Sullivan and Creed, 2007).

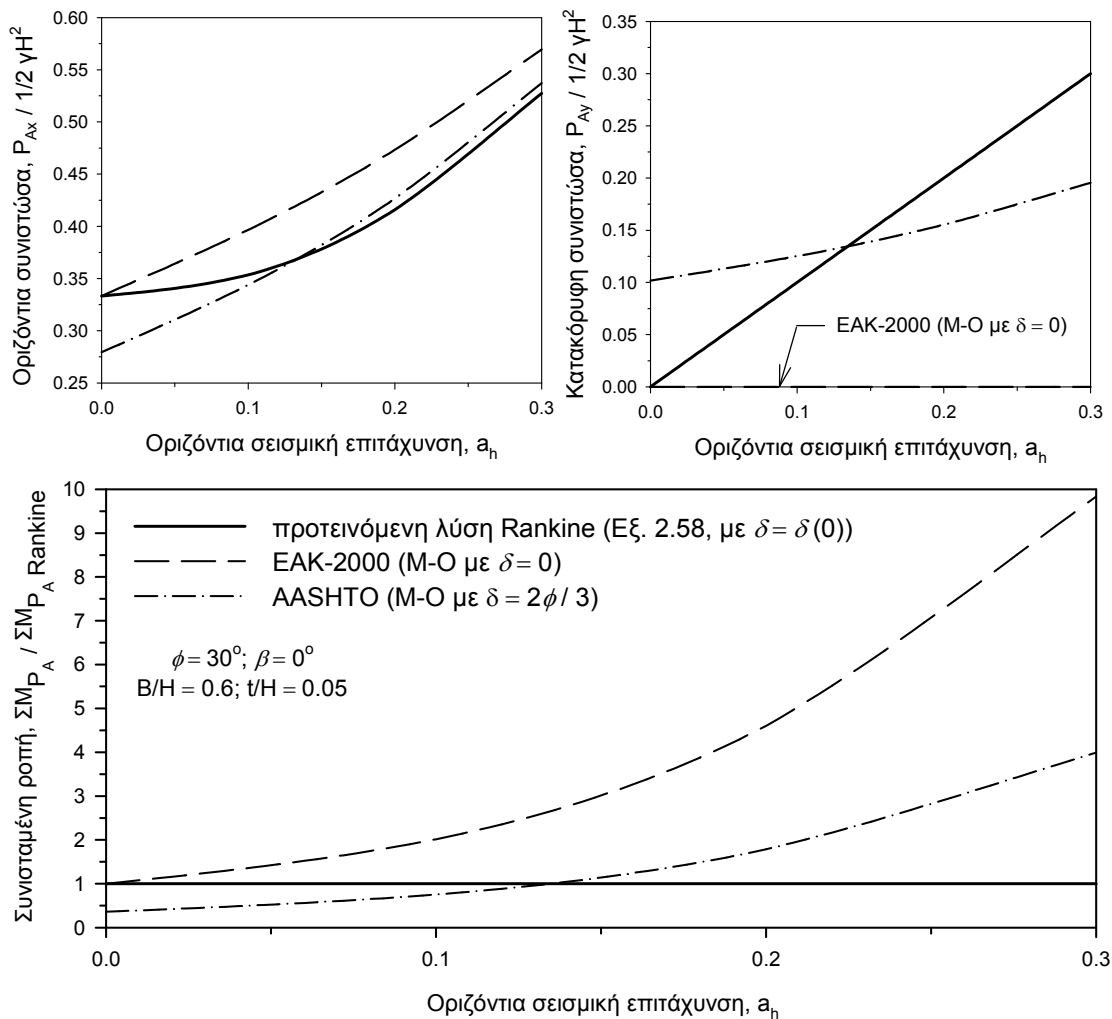


Σχήμα 2.13 Μεταβολή της κλίσης της ενεργητικής ώθησης στο κατακόρυφο νοητό επίπεδο $\delta(0)$, συναρτήσει της σεισμικής επιτάχυνσης και της κλίσης του πρανούς β

Ενδιάμεσα στις δύο ακραίες περιπτώσεις κινείται η πρόταση των αμερικάνικων προδιαγραφών AASHTO LRFD (2009), για χρήση μιας ονομαστικής κλίσης $\varphi/3 \leq \delta \leq 2\varphi/3$, αντίστοιχη της φυσικής τραχύτητας του τοίχου δ_w , η οποία άλλοτε δίνει συντηρητικές και άλλοτε μη συντηρητικές προβλέψεις, όπως φαίνεται στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί. Στην πραγματικότητα, η κλίση $\delta(0)$ κυμαίνεται πάντοτε μεταξύ της τιμής β (βαρυτική φόρτιση) και της τιμής φ όταν το κατακόρυφο επίπεδο AD ταυτιστεί με τη χαρακτηριστική $-\beta$ ($\omega_\beta = 0$). Για αρνητικά ω_β , οι καμπύλες ακολουθούν ένα κατερχόμενο κλάδο ο οποίος δεν έχει σχεδιαστεί στο διάγραμμα για λόγους ευκρίνειας.

Στο Σχ. 2.14 παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα που δείχνει την επίδραση

των διαφορετικών παραδοχών για το μέγεθος και την κλίση της ώθησης από τους διάφορους κανονισμούς, στα φορτία σχεδιασμού. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται ως ακραίο παράδειγμα η περίπτωση οριζοντίου επιχώματος ($\beta = 0^\circ$) με γωνία τριβής $\phi = 30^\circ$. Για μεγαλύτερες τιμές του ϕ και κυρίως του β οι αποκλίσεις μεταξύ των διαφόρων παραδοχών είναι μικρότερες.



Σχήμα 2.14 Σύγκριση της προτεινόμενης λύσης Rankine με τις προτάσεις του EAK-2000 (M-O με $\delta = \beta$) και της AASHTO (M-O με $\delta = 2\phi/3$), ως προς τα φορτία σχεδιασμού

Από τα διαγράμματα φαίνεται ξεκάθαρα ότι ακόμα και μια μικρή μεταβολή στην οριζόντια συνιστώσα P_{Ax} και στην κατακόρυφη P_{Ay} προκαλεί μεγάλη μείωση στη συνισταμένη ροπή της ώθησης ως προς τον πόδα του τοίχου (έως 10 φορές μικρότερη από αυτή που προβλέπει ο EAK-2000 και 4 φορές μικρότερη από αυτή της AASHTO), κυρίως λόγω του μεγάλου μοχλοβραχίονα της κατακόρυφης συνιστώσας (πλάτος B της πλάκας

θεμελίου). Αποδεικνύεται επίσης ο συντηρητικός χαρακτήρας της πρότασης του ΕΑΚ-2000, σε σχέση με την πρόταση της AASHTO η οποία γίνεται συντηρητική μόνο για υψηλές επιταχύνσεις.

Την ευεργετική επίδραση της μεταβολής της κλίσης $\delta(0)$ σε συνθήκες με σεισμό παρατήρησαν και οι Evangelista et al. (2010), σε μια παρεμφερή ανάλυση τάσεων, τα αποτελέσματα της οποίας επιβεβαίωσαν και με αριθμητικές αναλύσεις. Ωστόσο, η λύση αυτή μειονεκτεί σε σχέση με την παρούσα, καθώς δεν κατέληξε σε απλές, κλειστές εκφράσεις, αλλά έχει δομηθεί με σκοπό τη χρήση με τη μορφή υπολογιστικού φύλλου. Αντίθετα, η προτεινόμενη ανάλυση καταλήγει στις απλές εκφράσεις (2.20) και (2.21), οι οποίες μπορούν πολύ εύκολα να εφαρμοστούν στην πράξη, ακόμα και να ενσωματωθούν σε κανονιστικές διατάξεις.

2.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΑΝΩ ΟΡΙΟΥ

2.3.1 Μηχανισμοί λογαριθμικής σπείρας

Η λύση τύπου οριακής ισορροπίας (τύπου άνω ορίου) η οποία αναπτύσσεται στην παρούσα ενότητα, έχει ως σκοπό τη βελτίωση της ακρίβειας της προηγούμενης τασικής λύσης, ειδικά για την περίπτωση των παθητικών ωθήσεων. Η διαφορά με τις συμβατικές μεθόδους της κινηματικής οριακής ανάλυσης είναι ότι ο κρίσιμος μηχανισμός δεν προκύπτει μέσω βελτιστοποίησης, αλλά προκαθορίζεται ώστε να είναι συμβατός με τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων, όπως αυτές προκύπτουν με βάση τα ευρήματα της ανάλυσης οριακών τάσεων (Φόη, 2010).

Οι προτεινόμενοι μηχανισμοί αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα στις Ζώνες Rankine και τμήματα λογαριθμικής σπείρας για τις μεταβατικές ζώνες. Η λογαριθμική σπείρα είναι ο πλέον διαδεδομένος τρόπος προσομοίωσης των καμπυλόγραμμων μηχανισμών αστοχίας. Μηχανισμοί τέτοιου τύπου έχουν χρησιμοποιηθεί από τον Terzaghi (1943) για τον υπολογισμό βαρυτικών ωθήσεων. Οι συγκεκριμένοι μηχανισμοί που αποτελούνται από ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο εκτείνεται ως την επιφάνεια του εδάφους και μιας λογαριθμικής σπείρας κοντά στον τοίχο δεν είναι τυχαίοι, καθώς η επίπεδη επιφάνεια αστοχίας ακολουθεί τη λύση Rankine. Βελτιστοποιημένοι μηχανισμοί αυτού του είδους έχουν παρουσιαστεί από τους Kumar & Subba Rao (1997a), Kumar (2001), Murthy (2003) και Kame et al. (2010). Λύσεις λογαριθμικής σπείρας με σεισμό για ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις έχουν δημοσιευτεί από τους Chen & Liu (1990) και πιο πρόσφατα για παθητικές ωθήσεις από τους Morrison & Ebeling (1995), Kumar (2001) και

Subba Rao & Choudhury (2005). Επίσης έχουν προταθεί μηχανισμοί που αποτελούνται εξολοκλήρου από λογαριθμική σπείρα, όπως η λύση των Soubra & Macuh (2002).

Οι συντελεστές ενεργητικών ωθήσεων που παράγονται με τη χρήση της λογαριθμικής σπείρας είναι πιο ακριβείς από αυτούς που παράγουν οι απλοποιημένες λύσεις Coulomb και Mononobe - Okabe. Παρ' όλα αυτά η διαφορά στις ενεργητικές ωθήσεις είναι γενικώς μικρή, με αποτέλεσμα να προτιμούνται στην πράξη οι κλασικές λύσεις λόγω της απλότητάς τους. Για συνθήκες παθητικών εδαφικών ωθήσεων η επίδραση της καμπυλότητας είναι σημαντικότερη, συνεπώς στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές παθητικών ωθήσεων που παράγει η μέθοδος της λογαριθμικής σπείρας είναι αρκετά πιο ακριβείς. Ωστόσο η πολύπλοκη μορφή των συγκεκριμένων λύσεων τις καθιστά δύσχρηστες για πρακτικές εφαρμογές. Το ίδιο δύσχρηστη είναι πολλές φορές η απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε μορφή πινάκων και νομογραφημάτων.

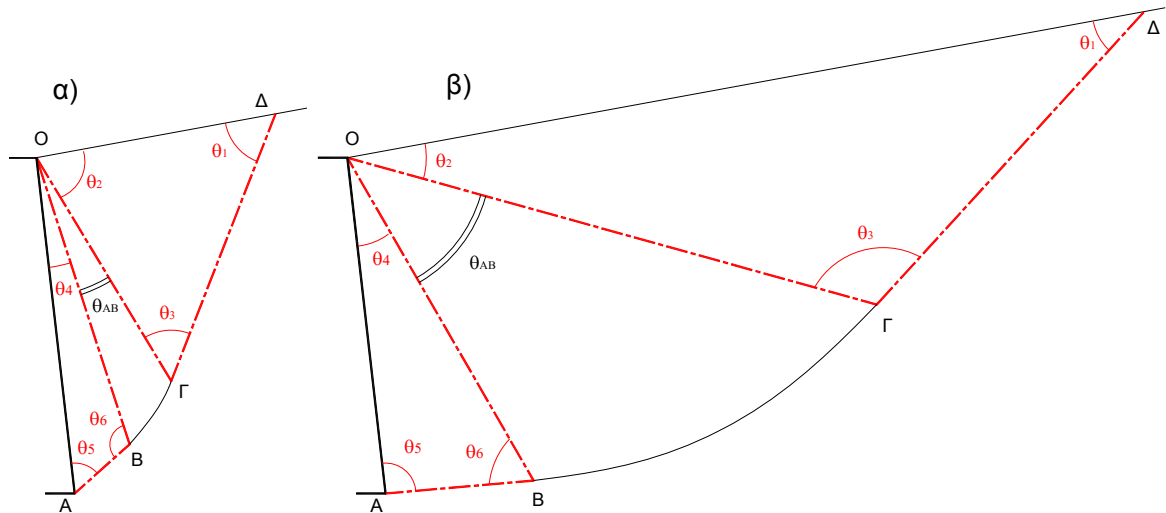
Η προτεινόμενη λύση επιδιώκει να καλύψει σε ικανοποιητικό βαθμό τόσο το θέμα της ακρίβειας, όσο και το θέμα της απλότητας, ώστε να προκύψει ένα εύχρηστο υπολογιστικό εργαλείο, για υπολογισμούς «δια χειρός» ή για χρήση σε μορφή υπολογιστικού φύλλου. Η συγκεκριμένη ανάλυση καταλήγει σε μαθηματικές σχέσεις κλειστής μορφής και ικανοποιητικής ακρίβειας όπως φαίνεται από τις συγκρίσεις που ακολουθούν.

2.3.2 Προτεινόμενοι μηχανισμοί αστοχίας

2.3.2.1 Μηχανισμός με δύο ζώνες Rankine και παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα

Αρχικά εξετάζεται ο μηχανισμός αστοχίας που απεικονίζεται στο Σχ. 2.14 για ενεργητική και παθητική κατάσταση και αποτελείται από τρεις εδαφικές σφήνες: την τριγωνική σφήνα ΟΔΓ από τη ζώνη του απειρομήκους πρανούς, την τριγωνική σφήνα ΟΒΑ από τη ζώνη της διεπιφάνειας τοίχου εδάφους και ανάμεσα στις δύο τη λογαριθμική σπείρα ΟΒΓ με γνωστό άνοιγμα θ_{AB} (Εξ. 2.8). Ο συγκεκριμένος μηχανισμός έχει κοινά στοιχεία τόσο με την ανάλυση των Chen & Liu (1990), όσο και με την ανάλυση τάσεων της παραγράφου 2.2, καθώς θεωρεί δύο τριγωνικά πρίσματα εκατέρωθεν της σπείρας, τα οποία όμως δεν είναι τυχαία, αλλά σχηματίζονται από τις χαρακτηριστικές των τάσεων στους αντίστοιχους κύκλους Mohr των ζωνών Rankine Α και Β. Σύμφωνα με τους Hettiaratchi & Reece (1975), η Ζώνη Β η οποία βρίσκεται ακριβώς πίσω από τον τοίχο θα έπρεπε να είναι τριγωνική αν η γωνία τραχύτητας δ του τοίχου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της διεπιφάνειας, όπως γενικώς θεωρείται. Ωστόσο η ύπαρξη

της δεύτερης αυτής τριγωνικής Ζώνης αμφισβητείται από αρκετούς ερευνητές. Για αυτό, σε επόμενη ενότητα επαναλαμβάνεται η ίδια ανάλυση για μια μεταβατική ζώνη από τη Ζώνη Α μέχρι τον τοίχο και τα αποτελέσματα των δύο μηχανισμών συγκρίνονται μεταξύ τους και με άλλες λύσεις.

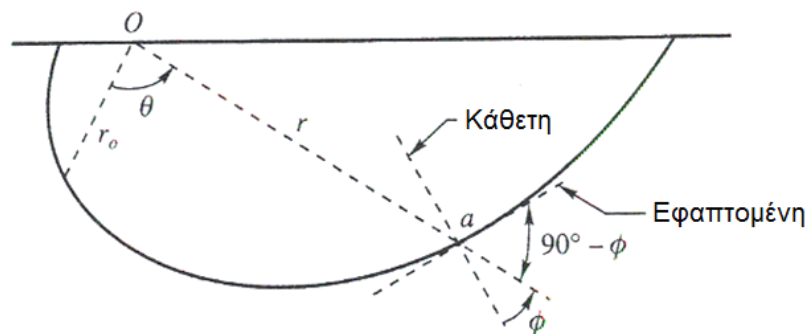


Σχήμα 2.14 Μηχανισμοί αστοχίας με δύο ζώνες Rankine και παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα για: (α) ενεργητική και (β) παθητική κατάσταση

Η Εξ. (2.22) δίνει το σχήμα της λογαριθμικής σπείρας με κέντρο στο σημείο O στο άνω άκρο του τοίχου, η οποία προσαρμόζεται στα άκρα των δύο τριγώνων (από το σημείο B μέχρι στο σημείο Γ)

$$r = r_0 e^{\theta \tan \varphi} \tag{2.22}$$

όπου r το μήκος της ακτίνας σε οποιαδήποτε θέση που σχηματίζει γωνία θ με την αρχική ακτίνα r₀, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.15.



Σχήμα 2.15 Ιδιότητες λογαριθμικής σπείρας (τροποποιημένο από Murthy, 2003)

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, η βασική της ιδιότητα της συγκεκριμένης σπείρας είναι ότι κάθε τυχαία ακτίνα Oa , σχηματίζει γωνία $90^\circ - \varphi$ με την εφαπτομένη στο a , δηλαδή το διάνυσμα Oa σχηματίζει γωνία φ με την κάθετη στην εφαπτομένη στο a . Αυτό οδηγεί στα εξής τρία συμπεράσματα: α) Η ίδια η σπείρα αναπαριστά μια καμπύλη επιφάνεια αστοχίας, αφού σε κάθε σημείο ισχύει $\tau/\sigma_n = \tan\varphi$, β) η προέκταση του διανύσματος της συνισταμένης ώθησης σε κάθε σημείο της σπείρας, διέρχεται από το σημείο O , συνεπώς η ροπή της εξωτερικής αντίδρασης ως προς το O είναι μηδέν, και γ) από τη στιγμή που τα ευθύγραμμα τμήματα $OB-AB$ και $OG-ΓΔ$ είναι χαρακτηριστικές τάσεων και εξ' ορισμού σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $90^\circ - \varphi$, η εφαρμογή της λογαριθμικής σπείρας από το OB στο OG (Σχ. 2.14) ικανοποιεί επακριβώς τις συνοριακές συνθήκες στις επιφάνειες αυτές.

Επομένως, ο μηχανισμός αστοχίας σχηματίζεται ως εξής: Με γνωστό το μήκος του τοίχου OA , υπολογίζεται αρχικά το τρίγωνο OAB . Στη συνέχεια, λαμβάνοντας το μήκος OB ως r_0 υπολογίζεται με τη βοήθεια της λογαριθμικής σπείρας το μήκος OG και ακολούθως υπολογίζεται το τρίγωνο $OGΔ$. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της ενεργητικής ώθησης, η εξίσωση της σπείρας γράφεται με αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη. Αυτό που απομένει να προσδιοριστεί για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του μηχανισμού αστοχίας, είναι οι γωνίες $\theta_1 - \theta_6$, από τους αντίστοιχους κύκλους Mohr της Περιοχής Α και της Περιοχής Β, όπως φαίνεται στα Σχ. 2.16 και 2.17. Συνδέοντας τον πόλο με τα σημεία επαφής του κύκλου στο κριτήριο αστοχίας (επίπεδα αστοχίας) λαμβάνονται οι χαρακτηριστικές των τάσεων (έντονες διακεκομμένες κόκκινες γραμμές), και οι αντίστοιχες γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_4$, και θ_6 (Εξ. 2.23) που περιγράφουν τον ενεργητικό μηχανισμό αστοχίας για θετικά φ και δ και τον παθητικό μηχανισμό αστοχίας για αρνητικά φ και δ , ενώ $\theta_3 = \pi/2 - \varphi$ και $\theta_5 = \pi/2 + \varphi$ είναι οι γνωστές γωνίες μεταξύ των χαρακτηριστικών.

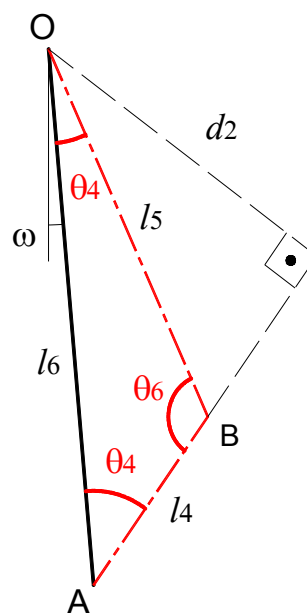
$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} - \frac{\Delta_1 + \beta}{2} - \frac{\psi_e}{2} \quad (2.23\alpha)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_1 + \beta}{2} + \frac{\psi_e}{2} \quad (2.23\beta)$$

$$\theta_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{\Delta_2 - \delta_w}{2} \quad (2.23\gamma)$$

$$\theta_5 = \frac{\pi}{2} - \varphi - \theta_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_2 - \delta_w}{2} \quad (2.23\delta)$$

Μετά τον υπολογισμό των γωνιών του μηχανισμού αστοχίας θ_i είναι εύκολος ο υπολογισμός των μηκών l_i (οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες θ_i), με τη μέθοδο των ημιτόνων. Αρχικά, το μοναδικό γνωστό μήκος είναι το ύψος του τοίχου, H . Ξεκινώντας επομένως από το τρίγωνο OAB (Σχ. 2.18), το μήκος του τοίχου l_6 συνδέεται απευθείας με το ύψος H μέσω της Εξ. (2.24), ενώ τα μήκη l_5 και l_4 προκύπτουν από το νόμο των ημιτόνων συναρτήσεϊ του l_6 και των αντίστοιχων γωνιών, Εξ. (2.25) και (2.26). Το ύψος του τριγώνου d_2 δίνεται από την Εξ. (2.27) και το βάρος του τριγώνου W_2 όπως προκύπτει από το γινόμενο του εμβαδού του τριγώνου OAB, με το ειδικό βάρος του εδάφους, γ , σύμφωνα με την Εξ. (2.28).



Σχήμα 2.18 Τριγωνικό εδαφικό πρίσμα OAB του Σχ. 2.14

$$l_6 = H / \cos \omega \tag{2.24}$$

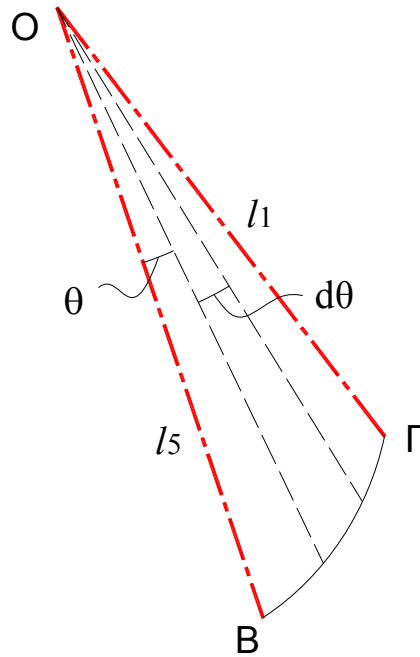
$$l_5 = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_6} l_6 = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} \tag{2.25}$$

$$l_4 = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_6} l_6 = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} \tag{2.26}$$

$$d_2 = \sin \theta_5 \frac{H}{\cos \omega} \tag{2.27}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} l_4 d_2 \gamma = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_6} \sin \theta_5 \frac{\gamma H^2}{\cos^2 \omega} \tag{2.28}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αντίστοιχα μήκη και βάρη για το πρίσμα που αντιστοιχεί στο πρίσμα ΟΒΓ με την καμπυλόγραμμη επιφάνεια αστοχίας (λογαριθμική σπείρα) που απεικονίζεται στο Σχ. 2.19. Το μήκος l_1 συνδέεται με το μήκος l_5 μέσω της εξίσωσης της λογαριθμικής σπείρας (Εξ. 2.29), ενώ το αντίστοιχο βάρος W_3 προκύπτει από το ολοκλήρωμα της Εξ. (2.30).

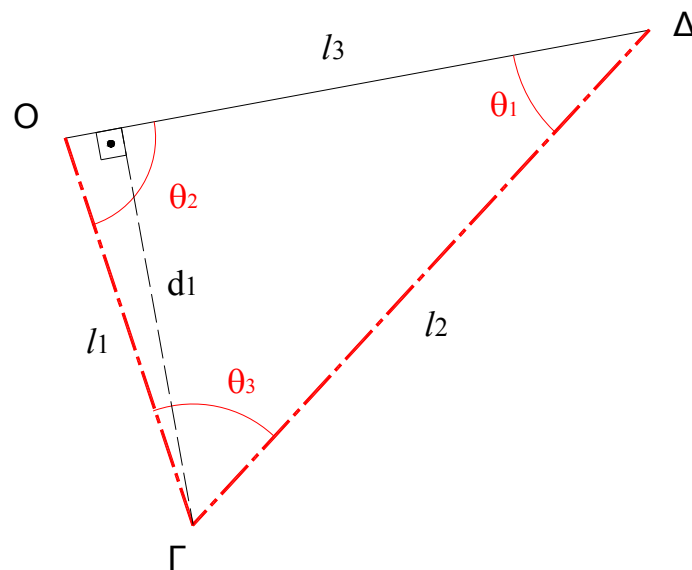


Σχήμα 2.19 Λογαριθμική σπείρα ΟΒΓ του Σχ. 2.14

$$l_1 = l_5 e^{-\theta_{AB} \tan \phi} = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} e^{-\theta_{AB} \tan \phi} \tag{2.29}$$

$$W_3 = \int_0^{\theta_{AB}} dW_3 = \int_0^{\theta_{AB}} \frac{1}{2} \gamma l_5^2 e^{-2\theta \tan \phi} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_5}{\sin^2 \theta_6} \gamma H^2 \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{1 - e^{-2\theta_{AB} \tan \phi}}{2 \tan \phi} \right) \tag{2.30}$$

Τέλος, από το τριγωνικό πρίσμα ΟΓΔ (Σχ. 2.20) υπολογίζονται τα μήκη l_2 και l_3 μέσω του νόμου των ημιτόνων, συναρτήσει του l_1 και των αντίστοιχων γωνιών (Εξ. 2.31 και 2.32). Το ύψος του τριγώνου d_2 δίνεται από την Εξ. (2.33) και το βάρος του τριγώνου W_2 όπως προκύπτει από το γινόμενο του εμβαδού του τριγώνου με το ειδικό βάρος του εδάφους, γ , από την Εξ. (2.34).



Σχήμα 2.20 Τριγωνικό εδαφικό πρίσμα ΟΓΔ του Σχ. 2.14

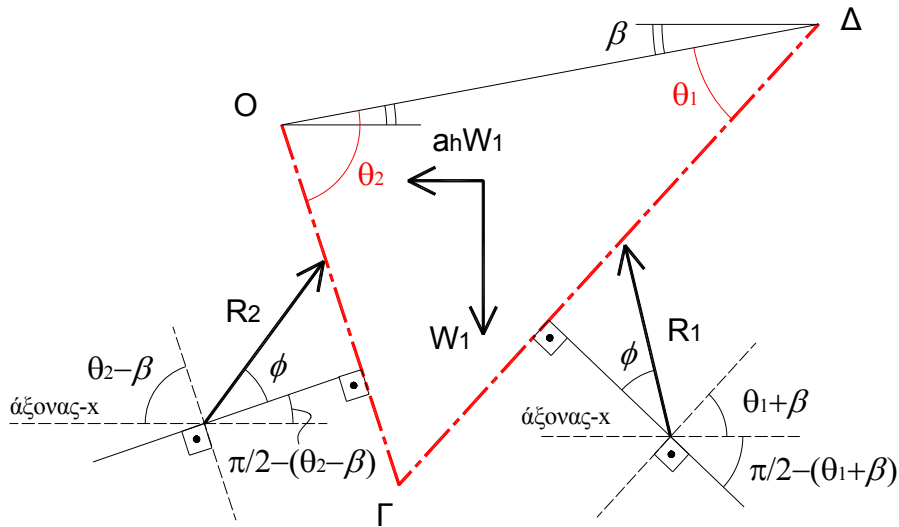
$$l_2 = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} l_1 = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_5}{\sin \theta_1 \sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} e^{-\theta_{AB} \tan \phi} \quad (2.31)$$

$$l_3 = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1} l_1 = \frac{\sin \theta_3 \sin \theta_5}{\sin \theta_1 \sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} e^{-\theta_{AB} \tan(-\phi)} \quad (2.32)$$

$$d_1 = \sin \theta_2 \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_6} \frac{H}{\cos \omega} e^{-\theta_{AB} \tan \phi} \quad (2.33)$$

$$W_1 = \frac{1}{2} l_3 d_1 \gamma = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_5}{\sin \theta_1 \sin^2 \theta_6} \frac{\gamma H^2}{\cos^2 \omega} e^{-2\theta_{AB} \tan \phi} \quad (2.34)$$

Ξεκινώντας τώρα από το τρίγωνο ΟΓΔ, εφαρμόζονται οι εξισώσεις ισορροπίας και προσδιορίζονται οι άγνωστες αντιδράσεις στα σύνορα του μηχανισμού. Στο τρίγωνο ΟΓΔ ενεργούν οι δυνάμεις πεδίου και οι δύο άγνωστες αντιδράσεις R_1 και R_2 πάνω στις επιφάνειες αστοχίας ΟΓ και ΟΔ (Σχ. 2.21), οι οποίες έχουν όμως γνωστή διεύθυνση, σχηματίζοντας γωνία ϕ με την κάθετη στο επίπεδο. Οι συνιστώσες των αντιδράσεων ως προς τον οριζόντιο άξονα x και τον κατακόρυφο άξονα y, δίνονται από τις Εξ. (2.35α-δ). Από την ισορροπία των δυνάμεων στου δύο άξονες προκύπτουν οι αντιδράσεις R_1 και R_2 (Εξ. 2.36 και 2.37)



Σχήμα 2.21 Ισορροπία του τριγωνικού πρίσματος ΟΓΔ του Σχ. 2.14

$$R_{1x} = R_1 \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \beta - \phi)\right] = R_1 \sin(\theta_1 + \beta - \phi) \tag{2.35\alpha}$$

$$R_{1y} = R_1 \cos(\theta_1 + \beta - \phi) \tag{2.35\beta}$$

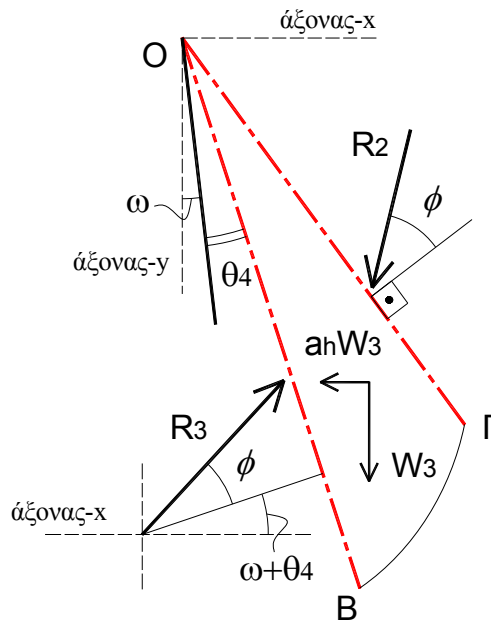
$$R_{2x} = R_2 \sin(\theta_2 - \beta - \phi) \tag{2.35\gamma}$$

$$R_{2y} = R_2 \cos(\theta_2 - \beta - \phi) \tag{2.35\delta}$$

$$R_1 = \frac{W_1 - R_2 \cos(\theta_2 - \beta - \phi)}{\cos(\theta_1 + \beta - \phi)} \tag{2.36}$$

$$R_2 = \frac{W_1 [\tan(\theta_1 + \beta - \phi) + a_h]}{\sin(\theta_2 - \beta - \phi) + \cos(\theta_2 - \beta - \phi) \tan(\theta_1 + \beta - \phi)} \tag{2.37}$$

Μεταφέροντας τη γνωστή αντίδραση R_2 στα σύνορα της λογαριθμικής σπείρας (Σχ. 2.22), εφαρμόζεται ισορροπία ροπών περί το σημείο Ο, προκειμένου να μηδενιστεί η ροπή της αντίδρασης στην πλευρά ΒΓ και να παραμείνει μοναδική άγνωστη η αντίδραση στο ΟΒ.



Σχήμα 2.22 Ισοροπία λογαριθμικής σπείρας ΟΒΓ του Σχ. 2.14

$$\Sigma M_O = R_3 \cos \phi \frac{2}{3} l_5 - \Sigma M_3 - R_2 \cos \phi \frac{2}{3} l_1 = 0 \tag{2.38}$$

όπου ΣM_3 η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων πεδίου που δίνεται από την Εξ. (2.39)

$$\Sigma M_3 = \int_0^{\theta_{AB}} dW_3 x_3 + \int_0^{\theta_{AB}} a_h dW_3 y_3 = \tag{2.39}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sin^3 \theta_5}{\sin^3 \theta_6} \gamma H^3 \frac{1}{\cos^3 \omega} \left[\frac{\cos(\theta_4 + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \omega) - e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [\cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi} \right]$$

$$+ a_h \frac{3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \omega) - \sin(\theta_4 + \omega) + e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [-3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi}$$

και x_3, y_3 οι αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες

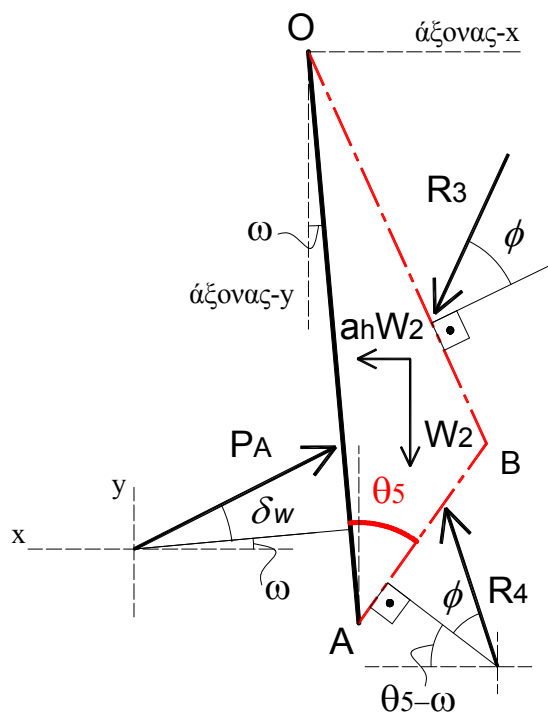
$$x_3 = \frac{2}{3} l_5 e^{-\theta \tan \phi} \sin(\omega + \theta_4 + \theta) \tag{2.40}$$

$$y_3 = \frac{2}{3} l_5 e^{-\theta \tan \phi} \cos(\omega + \theta_4 + \theta) \tag{2.41}$$

Από την Εξ. (2.38) εξάγεται η έκφραση (2.42) από την οποία υπολογίζεται η αντίδραση R_3

$$R_3 = \frac{3\Sigma M_3}{2l_5 \cos \phi} + R_2 e^{-\theta_{AB} \tan \phi} \tag{2.42}$$

Όπως και στο τρίγωνο ΟΓΔ, η ισορροπία των δυνάμεων στο τρίγωνο ΟΑΒ (Σχ. 2.23), δίνει τις αντιδράσεις R_4 (Εξ.2.44) και P_A (Εξ.2.45), μέσω των Εξ. (2.43).



Σχήμα 2.23 Ισορροπία του τριγωνικού πρίσματος ΟΑΒ του Σχ. 2.14

$$R_{3x} = R_3 \cos(\theta_4 + \omega + \phi) \tag{2.43\alpha}$$

$$R_{3y} = R_3 \sin(\theta_4 + \omega + \phi) \tag{2.43\beta}$$

$$P_{Ax} = P_A \cos(\delta + \omega) \tag{2.43\gamma}$$

$$P_{Ay} = P_A \sin(\delta + \omega) \tag{2.43\delta}$$

$$R_{4x} = R_4 \cos(\theta_5 - \omega + \phi) \tag{2.43\epsilon}$$

$$R_{4,y} = R_4 \sin(\theta_5 - \omega + \phi) \quad (2.43\sigma\tau)$$

$$R_4 = \frac{P_A \cos(\delta + \omega) - a_h W_2 - R_3 \cos(\theta_4 + \omega + \phi)}{\cos(\theta_5 - \omega + \phi)} \quad (2.44)$$

$$P_A = \frac{W_2 [1 + a_h \tan(\theta_5 - \omega + \phi)] + R_3 [\sin(\theta_4 + \omega + \phi) + \cos(\theta_4 + \omega + \phi) \tan(\theta_5 - \omega + \phi)]}{\sin(\delta + \omega) + \cos(\delta + \omega) \tan(\theta_5 - \omega + \phi)} \quad (2.45)$$

όπου θ_4 και θ_5 δίδονται από τις σχέσεις (2.23γ και δ)

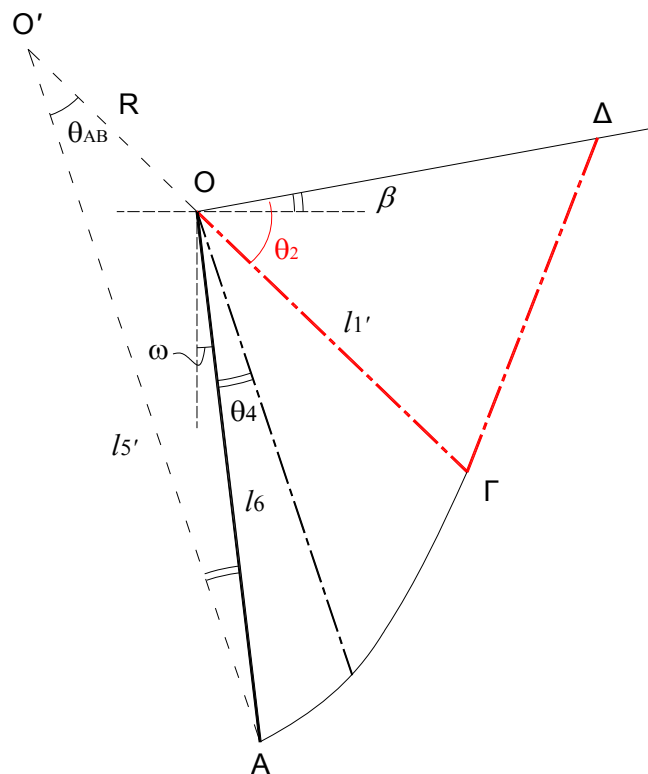
2.3.2.2 Μηχανισμός με μία ζώνη Rankine και λογαριθμική σπείρα μέχρι τον τοίχο

Ο δεύτερος μηχανισμός αστοχίας που εξετάζεται ακολουθεί την παραδοχή ότι η μεταβατική ζώνη είναι συνεχόμενη από τη ζώνη Rankine Α μέχρι τον τοίχο. Ο μηχανισμός αυτός, έχει παρουσιαστεί για την περίπτωση βαρυτικής φόρτισης από τον Terzaghi (1943) και είναι συμβατός με το την κλασική θεμελίωση του προβλήματος της οριακής ισορροπίας τάσεων από ερευνητές όπως οι Boussinesq (1876), Reissner (1924), von Karman (1927), Caquot & Kerisel, (1948) και άλλους, η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4. Τα αποτελέσματα από το συγκεκριμένο μηχανισμό θα χρησιμοποιηθούν για συγκρίσεις με τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα του επόμενου κεφαλαίου.

Η γεωμετρία του μηχανισμού αστοχίας απεικονίζεται στο Σχ. 2.24. Το τριγωνικό πρίσμα ΟΓΔ είναι παρόμοιας μορφής, αλλά δεν ταυτίζεται με αυτό του προηγούμενου μηχανισμού, καθώς οι διαστάσεις του καθορίζονται από το νέο μήκος l_1' το οποίο προκύπτει από τη νέα λογαριθμική σπείρα. Το κέντρο της σπείρας είναι τώρα μετατοπισμένο στη γνωστή θέση Ο' που ορίζει το σημείο τομής της προέκτασης της χαρακτηριστικής ΟΓ με την Ο'Α, η οποία είναι παράλληλη της χαρακτηριστικής ΟΒ και καταλήγει στη βάση του τοίχου. Με αυτόν τον τρόπο η λογαριθμική σπείρα εξακολουθεί να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των χαρακτηριστικών των τάσεων στα σημεία Α και Γ και να διατηρεί σταθερό το άνοιγμά της, ίσο με θ_{AB} . Η διαφορά με τον προηγούμενο μηχανισμό είναι ότι τώρα ένα τμήμα μόνο του πρίσματος της λογαριθμικής σπείρας αποτελεί μέρος του μηχανισμού αστοχίας, ενώ εισάγεται το νοητό τρίγωνο Ο'ΑΟ. Ολόκληρη η σπείρα αποτελεί τμήμα του μηχανισμού μόνο όταν τα σημεία Ο και Ο' ταυτίζονται, στη μοναδική δηλαδή περίπτωση που η επιφάνεια του τοίχου ΟΑ είναι χαρακτηριστική, όταν $\delta = \phi$. Αν κάποιος αγνοήσει τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων

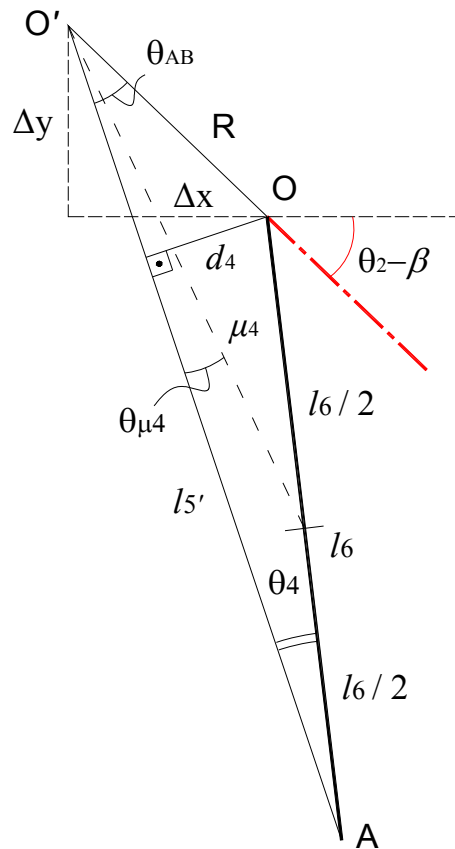
όπως συνήθως γίνεται στις κινηματικές λύσεις, τότε η θέση του πόλου O' αποτελεί παράμετρο προς βελτιστοποίηση και μπορεί να κινείται πάνω στην ευθεία $O'Γ$, δεξιά ή αριστερά του O , αν διατηρηθεί ο περιορισμός της ζώνης Rankine (Kumar & Subba Rao, 1997a; Murthy, 2003) ή και σε οποιαδήποτε άλλη θέση τυχαία στο επίπεδο (Soubra & Macuh, 2002).

Από τη στιγμή που διατηρούνται ίδιες οι κλίσεις των χαρακτηριστικών, παραμένουν ίδιες και οι γωνίες θ_i του μηχανισμού αστοχίας (Εξ. 2.23) και τροποποιούνται μόνο οι διαστάσεις l_i .



Σχήμα 2.24 Τροποποιημένος μηχανισμός αστοχίας με μία ζώνη Rankine

Στο Σχ. 2.25 απεικονίζεται η γεωμετρία του νοητού τριγώνου $O'AO$. Οι πλευρές R και l_5' του τριγώνου $O'AO$ υπολογίζονται με τη βοήθεια του νόμου των ημιτόνων συναρτήσει του ύψους του τοίχου, H (Εξ. 2.46 και 2.47). Το βάρος του τριγώνου δίνεται από την Εξ. (2.48), ενώ για τον υπολογισμό των ροπών υπολογίζονται οι μοχλοβραχίονες x_4 και y_4 και οι αποστάσεις Δx και Δy του σημείου O' από το O . (Εξ. 2.49 έως 2.52)



Σχήμα 2.25 Το νοητό τρίγωνο Ο'ΑΟ του Σχ. 2.24

$$R = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_{AB}} l_6 = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_{AB}} \frac{H}{\cos \omega} \tag{2.46}$$

$$l_5' = \frac{\sin(\pi - \theta_4 - \theta_{AB})}{\sin \theta_{AB}} l_6 = \frac{\sin(\theta_4 + \theta_{AB})}{\sin \theta_{AB}} \frac{H}{\cos \omega} \tag{2.47}$$

$$W_4 = \frac{1}{2} \gamma l_5' d_4 \tag{2.48}$$

όπου d_4 το ύψος του τριγώνου που είναι ίσο με $R \sin \theta_{AB}$

$$x_4 = \frac{2}{3} \mu_4 \sin(\omega + \theta_4 + \theta_{\mu_4}) \tag{2.49}$$

$$y_4 = \frac{2}{3} \mu_4 \sin(\omega + \theta_4 + \theta_{\mu_4}) \tag{2.50}$$

$$\Delta_x = R \cos(\theta_2 - \beta) \quad (2.51)$$

$$\Delta_y = R \sin(\theta_2 - \beta) \quad (2.52)$$

και μ_4 είναι το μήκος της διαμέσου του τριγώνου ενώ θ_{μ_4} η αντίστοιχη γωνία, τα οποία υπολογίζονται με τη βοήθεια του 1^{ου} θεωρήματος των διαμέσων και του νόμου των ημιτόνων αντίστοιχα (Εξ. 2.53 και 2.54)

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(R^2 + l_5'^2 - \frac{l_6^2}{2})} \quad (2.53)$$

$$\theta_{\mu_4} = \sin^{-1}\left(\frac{l_6}{2} \frac{\sin \theta_4}{\mu_4}\right) \quad (2.54)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της λογαριθμικής σπείρας, υπολογίζεται το μήκος l_1' που χρειάζεται για τον προσδιορισμό του τριγωνικού πρίσματος Rankine (Εξ. 2.55). Επίσης υπολογίζεται το βάρος ολόκληρης της σπείρας (Εξ. 2.56) και οι μοχλοβραχίονες x_3' και y_3' από το σημείο O' .

$$l_1' = l_5' e^{-\theta_{AB} \tan \phi} - R \quad (2.55)$$

$$W_3' = \int_0^{\theta_{AB}} \frac{1}{2} \gamma l_5'^2 e^{-2\theta \tan \phi} d\theta = \frac{1}{2} \gamma l_5'^2 \left(\frac{1 - e^{-2\theta_{AB} \tan \phi}}{2 \tan \phi} \right) \quad (2.56)$$

$$x_3' = \frac{2}{3} l_5' e^{-\theta \tan \phi} \sin(\theta_4 + \omega + \theta) \quad (2.57)$$

$$y_3' = \frac{2}{3} l_5' e^{-\theta \tan \phi} \cos(\theta_4 + \omega + \theta) \quad (2.58)$$

Για το τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει η ίδια ανάλυση όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Το βάρος του τριγώνου δίνεται από την Εξ. (2.59)

$$W_1 = \frac{1}{2} l_3 d_1 \gamma = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1} l_1' d_1 \gamma \quad (2.59)$$

όπου το d_1' δίνεται από την Εξ. (2.33).

Η εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας στο τρίγωνο ΟΓΔ καταλήγει στην ίδια έκφραση για την αντίδραση R_2 (Εξ. 2.37). Με γνωστή και την R_2 , εφαρμόζεται ισορροπία ροπών στο πρίσμα της σπείρας περί το σημείο Ο'.

$$\Sigma M_{O'} = \Sigma M_3' + R_2 \cos \phi \frac{2}{3} l_1' - \Sigma M_4 - \Sigma M_P = 0 \quad (2.60)$$

όπου $\Sigma M_3'$ η συνισταμένη ροπή ολόκληρης της σπείρας, ΣM_4 η ροπή του πλασματικού τριγώνου Ο'ΑΟ που πρέπει να αφαιρεθεί και ΣM_P η ροπή της ώθησης P , η οποία εφαρμόζεται στο 1/3 του ύψους του τοίχου.

$$\Sigma M_3' = \int_0^{\theta_{AB}} dW_3' x_3' + \int_0^{\theta_{AB}} a_h dW_3' y_3' \quad (2.61)$$

$$= \frac{1}{3} l_5'^3 \gamma \left[\frac{\cos(\theta_4 + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \omega) - e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [\cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi} + \right.$$

$$\left. + a_h \frac{3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \omega) - \sin(\theta_4 + \omega) + e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [-3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi} \right]$$

$$\Sigma M_4 = W_4 x_4 - a_h W_4 y_4 \quad (2.62)$$

$$\Sigma M_P = P_A [\cos(\omega + \delta) \left[\frac{2}{3} l_6 \cos \omega + \Delta_y \right] - \sin(\omega + \delta) \left[\frac{2}{3} l_6 \sin \omega + \Delta_x \right]] \quad (2.63)$$

Η τελική έκφραση για την ενεργητική ώθηση δίνεται από την Εξ. (2.64), η οποία ισχύει και για τις παθητικές ωθήσεις με τη γνωστή αλλαγή προσήμων. Αυτό ισχύει για όλες τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν, ακόμα και για τα πρόσημα στα αθροίσματα των ροπών τα οποία φτιάχνονται αυτόματα από τη γεωμετρία του προβλήματος. Αυτή η συμμετρία της λύσης χρησιμεύει για την εφαρμογή της με τη μορφή υπολογιστικού φύλλου. Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται αποτελέσματα τα οποία έχουν προκύψει με τη βοήθεια ενός υπολογιστικού φύλλου που κατασκευάστηκε στο Excel.

$$P_A = \frac{R_2 \cos \phi \frac{2}{3} (l_1' + R) + \Sigma M_3 - W_4 x_4 - a_h W_4 y_4}{[\cos(\omega + \delta) \left[\frac{2}{3} l_6 \cos \omega + \Delta_y \right] - \sin(\omega + \delta) \left[\frac{2}{3} l_6 \sin \omega + \Delta_x \right]]} \quad (2.64)$$

2.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα - Συγκρίσεις

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται αποτελέσματα για ενεργητικές και παθητικές βαρυτικές ωθήσεις (K_{Ay} , K_{Py}) από τις παρούσες λύσεις και από γνωστές λύσεις της βιβλιογραφίας. Στις στήλες του πίνακα μπορεί να παρατηρηθεί η αύξουσα διάταξη στις τιμές του K_{Ay} και η αντίστοιχη φθίνουσα στις τιμές του K_{Py} που αντικατοπτρίζει τη μη συντηρητική φύση των κινηματικών λύσεων (Coulomb, Chen, Soubra) και τη συντηρητική των λύσεων τύπου τάσεων (Sokolonskii, Mylonakis et al.). Οι προτεινόμενοι μηχανισμοί οριακής ισορροπίας (Εξ.2.45 και Εξ.2.64) παρατηρείται ότι παρέχουν καλύτερα άνω όρια από τη λύση Coulomb και τη λύση Chen & Liu αντίστοιχα.

Στο Σχ. 2.26 παρουσιάζονται συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της τραχύτητας του τοίχου, σε κατακόρυφο τοίχο και οριζόντιο πρανές. Στις ενεργητικές ωθήσεις όλες οι λύσεις βρίσκονται πολύ κοντά. Αισθητές διαφορές παρατηρούνται για την περίπτωση $\delta = \varphi$, για την οποία η παρούσα κινηματική λύση αποτελεί χειρότερο άνω όριο από τις λύσεις Coulomb και Chen & Liu. Στις παθητικές ωθήσεις, οι διάφορες λύσεις αποκλίνουν σημαντικά για τραχύτητες μεγαλύτερες από $2\varphi/3$. Η Εξ. (2.11) (Mylonakis et al., 2007) είναι πάντοτε αρκετά συντηρητική, ενώ ο παρεμφερής κινηματικός μηχανισμός της Εξ. (2.45) είναι πάντοτε κοντά στη λύση των Chen & Liu, από τη στιγμή που οι δύο λύσεις χρησιμοποιούν παρόμοιους μηχανισμούς, αλλά λίγο ψηλότερα που σημαίνει ότι είναι ελαφρά χειρότερο άνω όριο. Παρατηρείται επίσης ότι ο δεύτερος κινηματικός μηχανισμός (Εξ. 2.64) είναι καλύτερο άνω όριο καθώς κινείται κάτω από τη λύση Chen & Liu και ανάμεσα στις λύσεις των Soubra και Caquot & Kerisel, εκτός από την περίπτωση $\delta = \varphi$ για την οποία ταυτίζεται με την Εξ. (2.45).

Στο Σχ. 2.27 παρουσιάζονται αποτελέσματα του συντελεστή παθητικών σεισμικών ωθήσεων για διάφορες τιμές της κλίσης πρανούς, οριζόντιας επιτάχυνσης και γωνίας τριβής $\varphi = 40^\circ$. Φυσιολογικά οι τιμές του συντελεστή αυξάνονται όσο μεγαλώνει η τραχύτητα του τοίχου και μειώνεται ελαφρά με την αύξηση της σεισμικής επιτάχυνσης. Τα διαγράμματα επιβεβαιώνουν ότι η Εξ. (2.11) (Mylonakis et al., 2007) δίνει πάντοτε εξαιρετικά συντηρητικές τιμές, η Εξ. (2.45) είναι σχεδόν πάντα περισσότερο μη συντηρητική από τη λύση Chen & Liu, ενώ η Εξ. (2.64) αποτελεί καλύτερο άνω όριο και από τις δύο προηγούμενες. Στο Σχ. 2.28 παρουσιάζονται επίσης αποτελέσματα για σεισμικές παθητικές ωθήσεις. Η γενική συμπεριφορά των λύσεων δε μεταβάλλεται, παρατηρείται όμως μια βελτίωση της συμπεριφοράς των κινηματικών μηχανισμών των Εξ. (2.45) και (2.64) με την αύξηση της σεισμικής επιτάχυνσης.

Πίνακας 2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων για ενεργητικές και παθητικές εδαφικές ωθήσεις από διάφορες μεθόδους. $\omega = \beta = 0$ (Τροποποιημένο από Chen & Liu, 1990)

a. K_{Ay} – values†

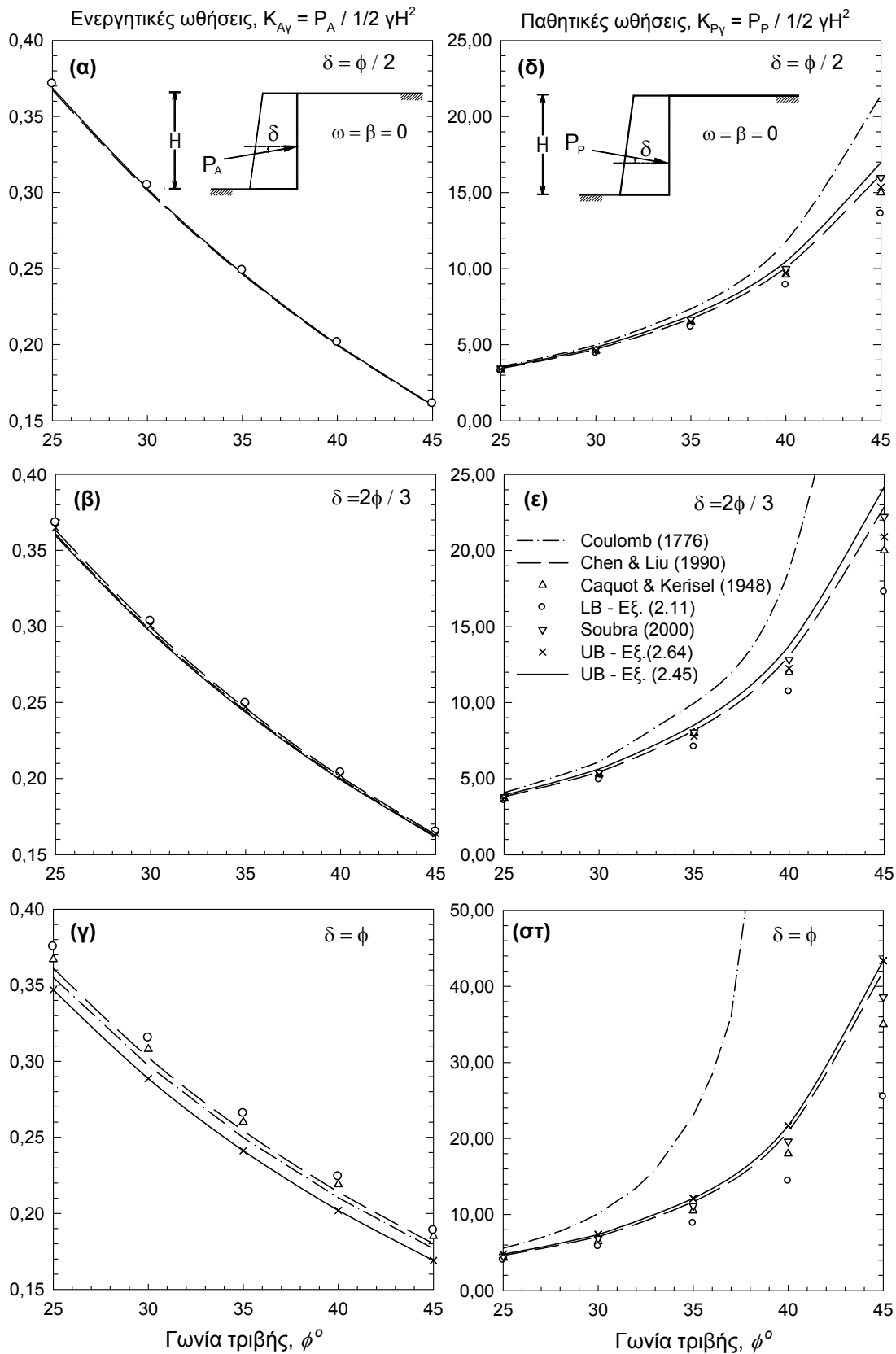
φ δ / φ	20^0			30^0			40^0		
	0	1/2	1	0	1/2	1	0	1/2	1
LE (Coulomb, 1776)	0.490	0.447	0.427	0.333	0.301	0.297	0.217	0.199	0.210
LE (Εξ. 2.45)	0.490	0.446	0.420	0.333	0.301	0.289	0.217	0.199	0.202
UB (Chen & Liu 1990)	0.490	0.448	0.434	0.333	0.303	0.302	0.217	0.200	0.214
LE (Εξ. 2.64)	-	0.449	0.420	-	0.303	0.289	-	0.201	0.202
SL (Sokolovskii 1965)	0.490	0.450	-	0.330	0.300	-	0.220	0.200	-
SL (Caquot & Kerisel, 1948)	0.490	-	0.440	0.333	-	0.308	0.217	-	0.219
LB (Mylonakis et al., 2007)	0.490	0.451	0.449	0.333	0.305	0.315	0.217	0.201	0.224

b. K_{Py} – values‡

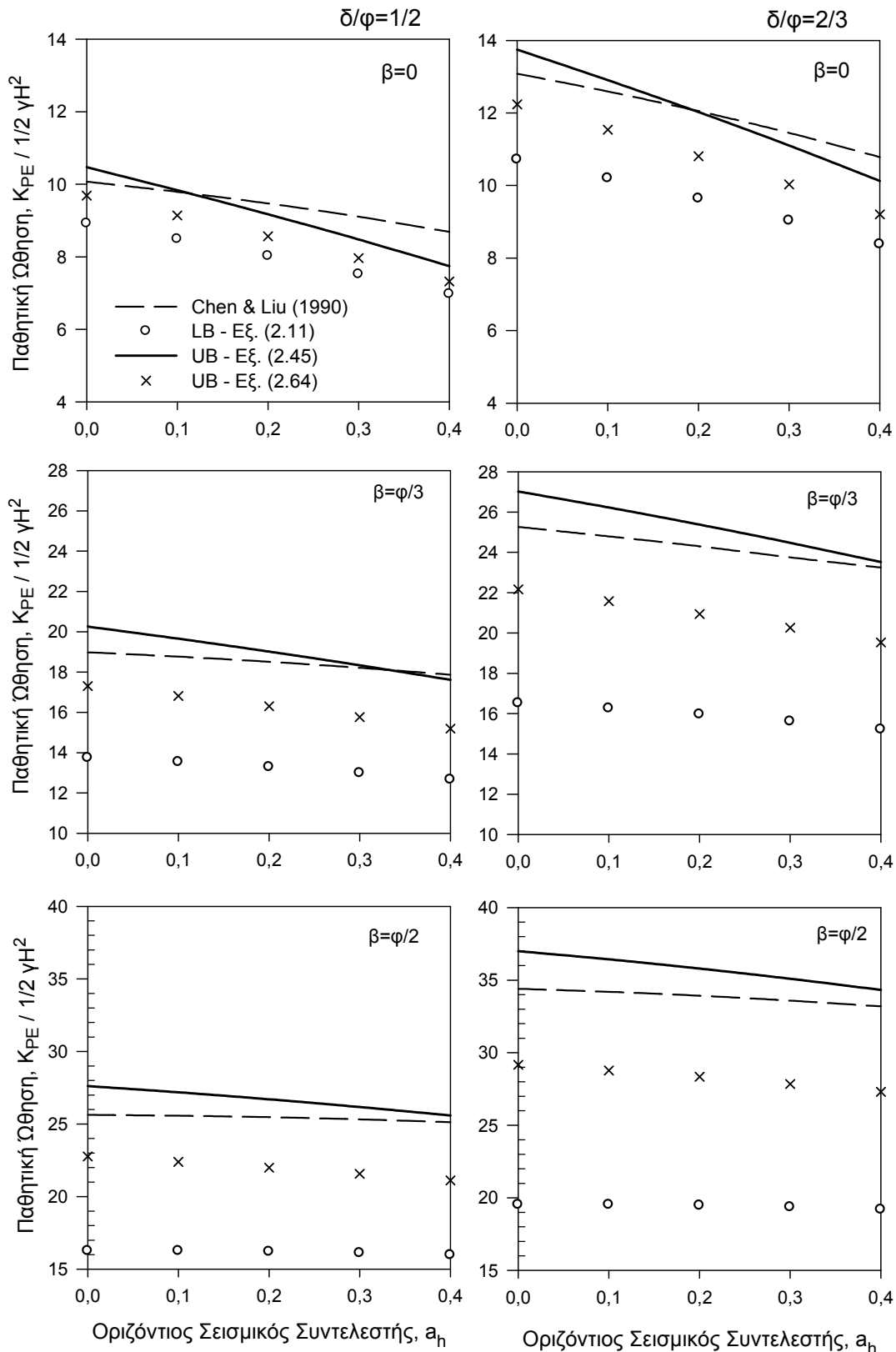
LE (Coulomb, 1776)	2.04	2.64	3.53	3.00	4.98	10.1	4.60	11.77	92.6
LE (Εξ. 2.45)	2.04	2.62	3.27	3.00	4.82	7.37	4.60	10.47	21.69
UB (Chen & Liu, 1990)	2.04	2.58	3.17	3.00	4.70	7.10	4.60	10.07	20.9
LE (Εξ. 2.64)	-	2.56	3.27	-	4.62	7.37	-	9.69	21.69
LE (Morrison & Ebeling, 1995)	-	-	-	3,00	4,62	7,08	-	-	-
UB (Soubra, 2000)	2,04	2,58	3,12	3,00	4,69	6,86	4,60	9,99	19,6
LE (Subba Rao, 2005)	-	-	-	3,00	4,62	6,68	-	-	-
UB (Kumar, 2001)	-	-	-	3,00	-	6,68	4,60	-	18,9
SL (Cheng, 2003)	-	-	-	3,00	-	6,56	-	-	18,2
SL (Sokolovskii 1965)	2,04	2,55	3,04	3,00	4,62	6,55	4,60	9,69	18,2
SL (Caquot & Kerisel, 1948)	2.05	2.55	3.10	3.00	4.60	6.50	4.60	9.60	18.0
LB (Mylonakis et al., 2007)	2.04	2.52	2.87	3.00	4.44	5.80	4.60	8.92	14.4

† $K_{Ay} = P_A / \frac{1}{2} \gamma H^2$, ‡ $K_{Py} = P_P / \frac{1}{2} \gamma H^2$

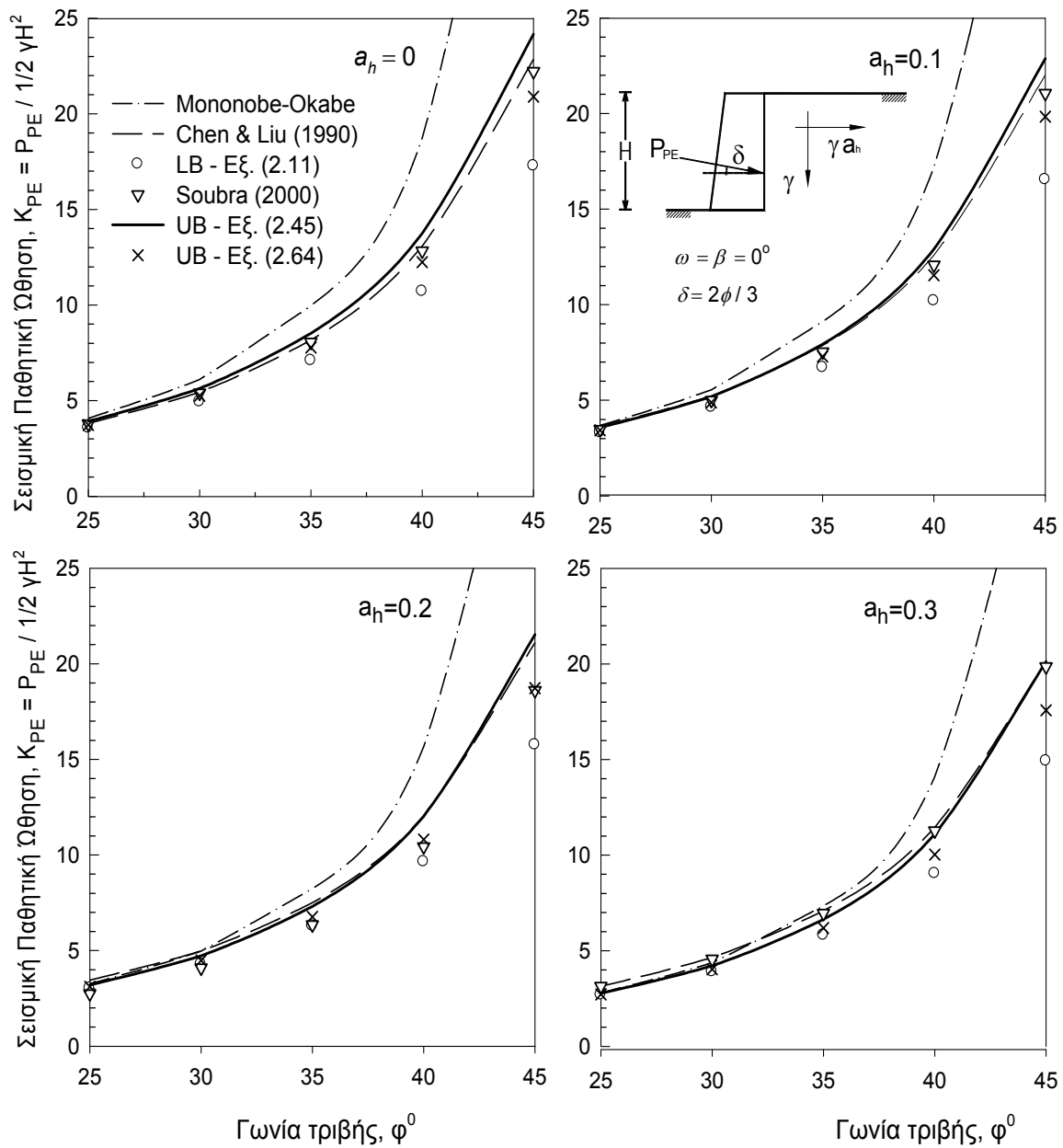
όπου: UB = Upper Bound, LB = Lower Bound, LE = Limit Equilibrium, SL = Slip Line



Σχήμα 2.26 Σύγκριση αποτελεσμάτων για ενεργητικές και παθητικές βαρυντικές ωθήσεις από διάφορες μεθόδους συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ και της τραχύτητας του τοίχου δ_w



Σχήμα 2.27 Σύγκριση αποτελεσμάτων για παθητικές σεισμικές ωθήσεις από διάφορες μεθόδους συναρτήσει της οριζόντιας επιτάχυνσης, για διάφορες τιμές της κλίσης πρανούς και γωνία τριβής $\phi = 40^\circ$



Σχήμα 2.28 Σύγκριση αποτελεσμάτων για τη μεταβολή του συντελεστή παθητικών σεισμικών ωθήσεων K_{PE} από διάφορες μεθόδους συναρτήσει της γωνίας τριβής, για διάφορα επίπεδα οριζόντιας σεισμικής επιτάχυνσης

2.4 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν Κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος της οριακής ανάλυσης τάσεων για την εξαγωγή μιας σειράς ακριβών και προσεγγιστικών λύσεων για την υπολογισμό ενεργητικών και παθητικών εδαφικών ωθήσεων σε τοίχους βαρύτητας και τοίχους

προβόλους, υπό γενικευμένη φόρτιση και γεωμετρία. Τα συμπεράσματα της οριακής ανάλυσης τάσεων χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή μιας απλοποιημένης λύσης άνω ορίου με σκοπό τη βελτίωση των προβλέψεων της λύσης, ειδικά στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων. Από τις παραπάνω αναλύσεις μπορούν να εξαχθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις και συμπεράσματα:

(1) Η προτεινόμενη λύση οριακής ανάλυσης τάσεων είναι απλούστερη από τις κλασικές εξισώσεις Coulomb και Mononobe – Okabe. Τα κύρια χαρακτηριστικά των μαθηματικών όρων της λύσης, συμπεριλαμβανομένων των προσήμων, μπορούν να εξαχθούν από φυσική θεώρηση σε αντίθεση με τις κλασικές εξισώσεις. Εκτεταμένες συγκρίσεις με καθιερωμένες λύσεις καταδεικνύουν πως η προτεινόμενη λύση είναι πάντοτε ασφαλής, καθώς υπερεκτιμά τις ενεργητικές ωθήσεις και υποεκτιμά τις παθητικές. Η ακρίβεια της λύσης είναι εξαιρετική ειδικά στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων, ενώ στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, παρότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο, υπάρχει αισθητή βελτίωση έναντι των προβλέψεων κλασικών λύσεων τύπου Coulomb και Mononobe - Okabe.

(2) Η οριακή ανάλυση τάσεων επιτρέπει τον υπολογισμό της κατανομής των ωθήσεων. Βέβαια, στο πλαίσιο του κλασικού εδαφικού μοντέλου (τέλεια πλαστικό) και της κινηματικής του τοίχου (οριζόντια μετατόπιση χωρίς περιστροφή), η κατανομή των εδαφικών ωθήσεων στον τοίχο είναι γραμμική με το βάθος (επομένως το σημείο εφαρμογής βρίσκεται στο 1/3 του βάθους), τόσο για το στατικό όσο και για το σεισμικό πρόβλημα. Η παρούσα λύση, από τη στιγμή που εξετάζει ισορροπία τάσεων, παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο για την πρόβλεψη διαφορετικών κατανομών τάσεων, με χρήση μεταβλητών παραμέτρων με το βάθος (σεισμική επιτάχυνση ή εδαφικές παράμετροι).

(3) Η προτεινόμενη κινηματική λύση, η οποία ταυτόχρονα ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων, βελτιώνει σημαντικά τις αριθμητικές προβλέψεις, ειδικά στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων. Επιπλέον καταλήγει σε απλές, πλήρως συμμετρικές εκφράσεις, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με υπολογισμούς “χειρός” ή με τη μορφή υπολογιστικού φύλλου. Από τα αριθμητικά αποτελέσματα φαίνεται ότι ο μηχανισμός αστοχίας που δίνει καλύτερα αποτελέσματα είναι αυτός που περιλαμβάνει μια μόνο ζώνη Rankine (ελεύθερη επιφάνεια) και λογαριθμική σπείρα μέχρι τον τοίχο. Αντίθετα, ο μηχανισμός με τις δύο τριγωνικές ζώνες Rankine καταλήγει σε πιο σταθερό μαθηματικό τύπο, παρότι οι προβλέψεις του είναι εξαιρετικά μη ασφαλείς.

(4) Ακριβείς προβλέψεις από τη συγκεκριμένη οριακή ανάλυση τάσεων μπορούν

να προκύψουν κάτω από ένα γενικευμένο πεδίο τάσεων Rankine, το οποίο προκύπτει για άπειρους συνδυασμούς των πέντε παραμέτρων (φ , δ_w , ω , β , ψ_e) που ικανοποιούν τη συνθήκη (Εξ. 2.13). Ανάμεσα σε αυτές, ως ειδικές περιπτώσεις είναι και οι κλασικές περιπτώσεις της Rankine της βιβλιογραφίας ($\delta_w = \omega = \beta = \psi_e = 0$ και $\delta_w = \beta$ για $\omega = \psi_e = 0$). Παρουσιάζονται για πρώτη φορά κλειστές εκφράσεις για τον υπολογισμό της κρίσιμης τιμής κάθε παραμέτρου συναρτήσει των υπολοίπων τεσσάρων, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Rankine (Εξ. 2.13). Για κάθε συνδυασμό παραμέτρων που ικανοποιεί τη συνθήκη Rankine, το πρόβλημα αποκτά ευθύγραμμες χαρακτηριστικές και η προσεγγιστική λύση τάσεων γίνεται μια ακριβής λύση Rankine για το γενικευμένο πρόβλημα και συμπίπτει με τα αποτελέσματα της εξίσωσης Mononobe – Okabe και άλλων προσεγγιστικών λύσεων.

(5) Η ακριβής λύση Rankine μπορεί να έχει ευρεία εφαρμογή στην περίπτωση των τοίχων προβόλων σχήματος L, για την πρόβλεψη της ενεργητικής σεισμικής ώθησης. Αν και δεν αποτελεί δεσμευτική προϋπόθεση, στην παρούσα ανάλυση υιοθετείται η χρήση του κατακόρυφου νοητού επιπέδου για τον υπολογισμό της ώθησης, με τροποποιημένη όμως κλίση με την οποία εφαρμόζεται η ώθηση. Αποδεικνύεται ότι η κλίση αυτή αυξάνεται με τη σεισμική επιτάχυνση και κυμαίνεται από την ελάχιστη τιμή β για βαρυτική φόρτιση (κλίση πρανούς) έως τη μέγιστη τιμή που είναι η γωνία τριβής φ . Η αλλαγή της κλίσης με τη σεισμική επιτάχυνση συμβάλλει στην αύξηση της ευστάθειας του συστήματος. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί ώστε να προκύπτει οικονομικότερος σχεδιασμός των κατασκευών αντιστήριξης.

3. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΩΘΗΣΕΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΤΟΞΩΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ¹

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

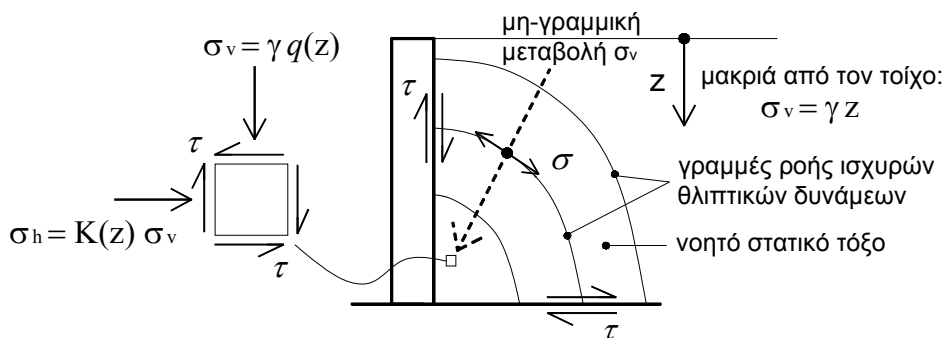
Η κατανομή των ωθήσεων που προκύπτει από την ψευδοστατική λύση της παραγραφου 2.2 (Εξ. 2.11) είναι τριγωνική με το βάθος, όπως άλλωστε και της συντριπτικής πλειονότητας των διαθέσιμων λύσεων, ως αποτέλεσμα της θεώρησης «υδροστατικής» συμπεριφοράς του εδάφους. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά πηγάζει από την απλοποιητική υπόθεση γραμμικής αύξησης των τάσεων με το βάθος, της σταθερής κατανομής των αδρανειακών δυνάμεων στην εδαφική μάζα, την θεώρηση ομοιόμορφης ανάπτυξης των παραμορφώσεων με απλή μετατόπιση (χωρίς περιστροφή) του τοίχου, και της ομοιογένειας του εδαφικού υλικού. Με βάση τις ίδιες παραδοχές, η τριγωνική κατανομή υιοθετείται και από τις μεθόδους οριακής ισορροπίας και τις κινηματικές μεθόδους της οριακής ανάλυσης, οι οποίες δεν μπορούν να προβλέψουν κατανομή τάσεων. Η αδυναμία αυτή δυσχεραίνει εξαιρετικά τη χρήση τους για την εκτίμηση της επιρροής της κινηματικής του προβλήματος στις αναπτυσσόμενες ωθήσεις.

Αντίθετα, η οριακή ανάλυση τάσεων μπορεί να ενσωματώσει μεταβλητές παραμέτρους με το βάθος και να προβλέψει κατανομές ωθήσεων διαφορετικές της τριγωνικής, όπως έχει παρατηρηθεί και πειραματικά (Tschaebotarioff, 1962; Tsagareli, 1965; Narain et al., 1969; Sherif et al., 1982; Fang & Ishibashi, 1986; Ishibashi & Fang, 1987; Fang et al., 1994; Nakamura, 2006 κ.α.). Οι κύριοι μηχανισμοί που ευθύνονται για την απόκλιση των ωθήσεων από την τριγωνική κατανομή σχετίζονται με την παραβίαση των βασικών προϋποθέσεων των ψευδοστατικών μεθόδων της οριακής ανάλυσης. Πρώτον, όσον αφορά στο σεισμικό πρόβλημα, δεδομένης της δυναμικής φύσης της σεισμικής φόρτισης και της αντίστοιχης απόκρισης του επιχώματος, η κατανομή των επιταχύνσεων δεν είναι ομοιόμορφη καθ' ύψος, αλλά μεταβάλλεται τόσο με τη συχνότητα, όσο και με την ένταση της διέγερσης (Kramer, 1996). Η συμπεριφορά αυτή λαμβάνεται εν μέρει υπόψη στις διαθέσιμες ελαστοδυναμικές, κυματικές λύσεις, οι οποίες προφανώς δεν ισχύουν στην κατάσταση της πλαστικής διαρροής του επιχώματος.

¹ Ο όρος «τοξωτή λειτουργία» χρησιμοποιείται εδώ αναφορικά με οποιαδήποτε εντατική κατάσταση η οποία – ανεξαρτήτως προέλευσης – οδηγεί σε μη γραμμική αύξηση των τάσεων με το βάθος.

Ο δεύτερος μηχανισμός, σχετίζεται με την κινηματική του τοίχου και την επίδραση της στην ανάπτυξη του μηχανισμού αστοχίας. Για κινηματικές συνθήκες που περιλαμβάνουν περιστροφή του τοίχου (περί την κορυφή ή τη βάση), η αστοχία εξελίσσεται προοδευτικά καθ' ύψος και η κατανομή των τάσεων είναι μη υδροστατική, με επίδραση τόσο στο σημείο εφαρμογής όσο και στο μέγεθος της ώθησης. Η επίδραση των δύο αυτών παραγόντων μελετώνται εδώ, ως απλές επεκτάσεις της βασικής λύσης που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Τα παραπάνω φαινόμενα μπορούν να ερμηνευθούν μέσω του μηχανισμού της τοξωτής λειτουργίας του εδάφους (arching), ο οποίος περιγράφεται από τη μηχανική του κοκκώδους μέσου. Μια συγκεκριμένη μορφή αυτού του φαινομένου, που οφείλεται στη διατμητική αντίσταση της διεπιφάνειας τοίχου εδάφους και στην αλληλοεμπλοκή των εδαφικών κόκκων, παρουσιάζεται στο Σχ. 3.1 (Nadukuru & Michalowski, 2012). Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της κατακόρυφης ορθής τάσης σ_v με το βάθος με μια μη-γραμμική συνάρτηση $q(z)$. Για την ερμηνεία του έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγιστικές, θεωρητικές λύσεις που βασίζονται στη στατική ανάλυση μιας στοιχειώδους οριζόντιας λωρίδας του πρίσματος αστοχίας, η οποία προτάθηκε από τον Janssen (1895) για ωθήσεις σε σιλό και στη συνέχεια εφαρμόστηκε από πλήθος ερευνητών (Handy, 1983; Michalowski, 1984; Harrop – Williams, 1990; Wang, 2000; Paik & Salgado, 2003; Nadukuru & Michalowski, 2012) σε συναφή προβλήματα, καθώς και αρκετές αριθμητικές προσομοιώσεις. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιείται μόνο η γραμμική μεταβολή $q(z) = z$, και εξετάζονται αποκλειστικά οι μηχανισμοί που προκαλούν μεταβολή στο συντελεστή πλευρικών ωθήσεων $K(z)$. Επειδή όμως το παραπάνω φαινόμενο σχετίζεται άμεσα με τις κινηματικές συνθήκες, η επίδρασή του θα σχολιαστεί εκτενώς κατά την παρουσίαση των συγκρίσεων μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων που ακολουθούν.

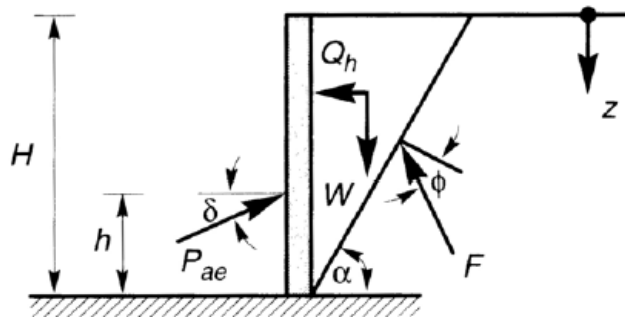


Σχήμα 3.1 Μηχανισμοί τοξωτής λειτουργίας του εδάφους

3.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΗΣ ΤΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ

3.2.1 Η μέθοδος των Steedman & Zeng (1990) και οι επεκτάσεις της

Η πρώτη προσπάθεια ενσωμάτωσης της κυματικής φύσης της σεισμικής διέγερσης στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου αστοχίας και της αντίστοιχης κατανομής των σεισμικών ωθήσεων πραγματοποιήθηκε από τους Steedman & Zeng (1990) με τη βοήθεια του μηχανισμού που απεικονίζεται στο Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2 Ισορροπία δυνάμεων στο εδαφικό πρίσμα των Steedman & Zeng (1990)

Η συνολική ώθηση P_{ae} προκύπτει από την ισορροπία του παραπάνω τριγωνικού εδαφικού πρίσματος, το οποίο ταυτίζεται με το στατικό πρίσμα της λύσης Coulomb (δοκιμαστική κλίση α). Η διαφορά με τη λύση Coulomb είναι ότι στην ισορροπία των δυνάμεων υπεισέρχεται η χρονικά μεταβαλλόμενη (και μη-γραμμική με το βάθος) αδρανειακή δύναμη $Q_h(t)$, η οποία υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$Q_h(t) = \int_0^H m(z)a(z,t)dz = \frac{\lambda\gamma\alpha_h}{4\pi^2 g \tan \alpha} [2\pi H \cos \omega\zeta + \lambda(\sin \omega\zeta - \sin \omega t)] \quad (3.1)$$

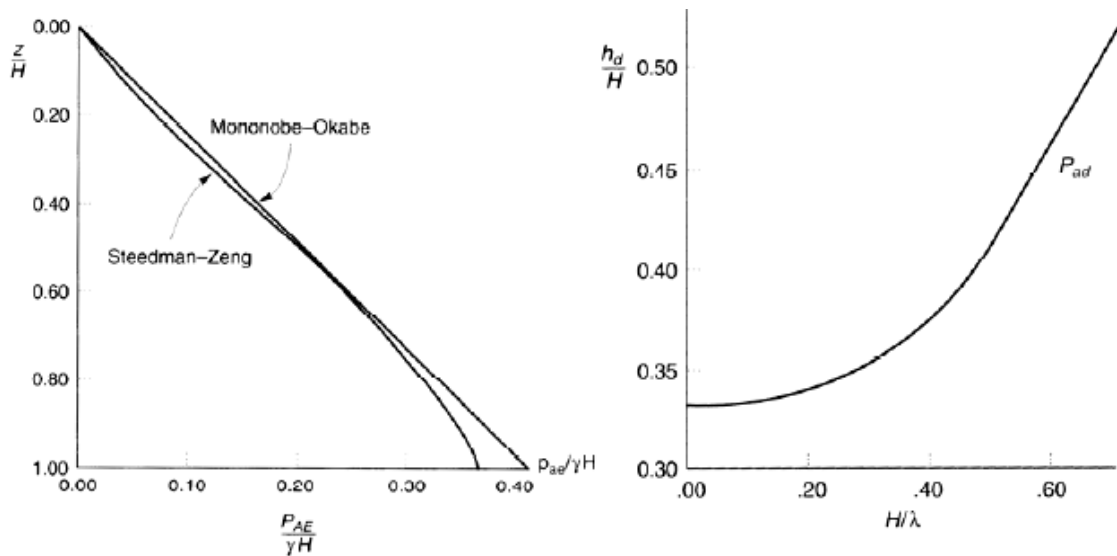
Στην παραπάνω έκφραση, με $m(z)$ συμβολίζεται η μάζα ενός στοιχείου της εδαφικής σφήνας σε βάθος z (Εξ. 3.2) και με $a(z,t)$ η μεταβολή της σεισμικής επιτάχυνσης με το βάθος, όπως προκύπτει από την εξίσωση του μονοδιάστατου οδεύοντος κύματος (Εξ. 3.3)

$$m(z) = \frac{\gamma H - z}{g \tan \alpha} dz \quad (3.2)$$

$$\alpha(z,t) = ah \sin \left[\omega \left(t - \frac{H-z}{V_s} \right) \right] \tag{3.3}$$

όπου $\lambda = 2\pi V_s/\omega$ το μήκος κύματος, $\zeta = t - H/V_s$, V_s η ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιων κυμάτων στο υλικό του επιχώματος, a_h το πλάτος της οριζόντιας επιτάχυνσης και ω η κυκλική συχνότητα της διέγερσης βάσης.

Είναι προφανές ότι τόσο η δυναμική ώθηση, όσο και το σημείο εφαρμογής της εξαρτώνται από το λόγο H/λ και μεταβάλλονται με το χρόνο. Για κινήσεις πολύ χαμηλής συχνότητας (μικρή τιμή του λόγου H/λ), το σημείο εφαρμογής παίρνει την τιμή $H/3$, η οποία ταυτίζεται με την υδροστατική λύση. Για κινήσεις υψηλότερης συχνότητας, το σημείο εφαρμογής μετακινείται ψηλότερα, ξεπερνώντας την τιμή 0.5. Τυπικά αποτελέσματα για τη μέγιστη ώθηση και το σημείο εφαρμογής της τη στιγμή που μεγιστοποιείται η ροπή ανατροπής, απεικονίζονται στο Σχ. 3.3.



Σχήμα 3.3 Αποτελέσματα της μεθόδου Steedman & Zeng (1990) για: α) την κατανομή των εδαφικών ωθήσεων με το βάθος για $a_h = 0.2g$ και λόγο $H/\lambda = 0.3$ και β) τη θέση του σημείου εφαρμογής της ώθησης για την οποία μεγιστοποιείται η ροπή ανατροπής, συναρτήσει του λόγου H/λ , $a_h = 0.2g$

Η ίδια μέθοδος, με μικρές τροποποιήσεις και επεκτάσεις, έχει υιοθετηθεί αργότερα από τους Choudhury & Nimbalkar (2005, 2006) και τους Ghanbari & Ahmadabadi (2010). Παρότι δημοφιλής, η συγκεκριμένη μέθοδος παρουσιάζει δύο σημαντικά θεωρητικά

μειονεκτήματα: Πρώτον, εφαρμόζει μια ελαστική κυματική λύση σε έδαφος που βρίσκεται υπό πλαστική διαρροή, κάτι που μόνο ως αδρή προσέγγιση μπορεί να είναι αποδεκτό. Δεύτερον, το οδεύον κύμα της Εξ. (3.3) δεν λαμβάνει υπόψη την ανάκλαση του κύματος στην ελεύθερη επιφάνεια και επομένως δεν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Και οι δύο αυτοί περιορισμοί αίρονται με την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας που παρουσιάζεται στην ενότητα που ακολουθεί.

3.2.2 Προτεινόμενη μεθοδολογία βάσει οριακής ανάλυσης τάσεων

3.2.2.1 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας

Η ανωτέρω ανάλυση βασίζεται στην εφαρμογή μεταβλητής με το βάθος σεισμικής επιτάχυνσης, και επομένως μεταβλητής σεισμικής γωνίας, $\psi_e(z) = \tan^{-1} [a_h(z)]$, στην Εξ. (2.11), όπως δείχνει η Εξ. (3.4)

$$K(z) = \frac{\cos(\omega - \beta) \cos(\beta + \psi_e(z))}{\cos \psi_e(z) \cos \delta_w \cos^2 \omega} \left[\frac{1 - \sin \phi \cos(\Delta_2 - \delta_w)}{1 + \sin \phi \cos[\Delta_{1e} + \beta + \psi_e(z)]} \right] e^{-2\theta_{AB}(z) \tan \phi} \quad (3.4)$$

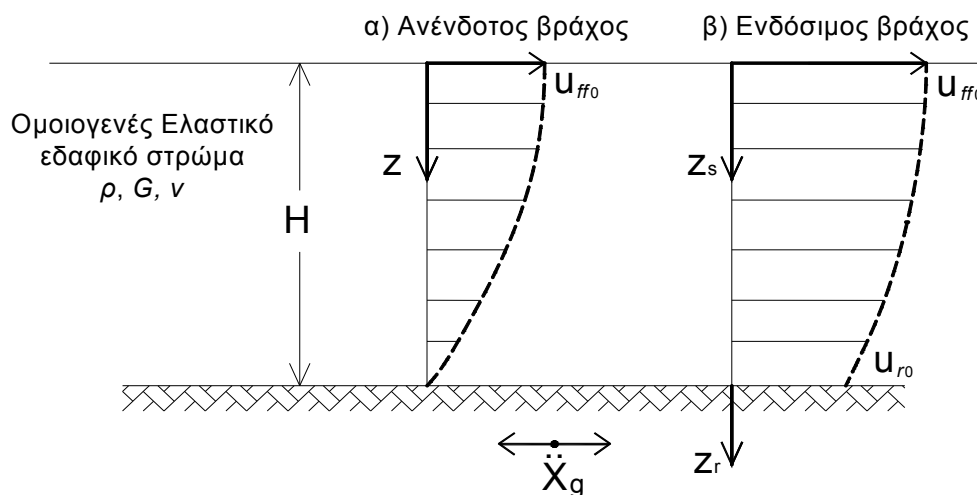
Αντίθετα με τις προαναφερθείσες μεθόδους που βασίζονται σε πρίσματα ολίσθησης, η χρήση μεταβλητής σεισμικής γωνίας στην πλαστική οριακή ανάλυση τάσεων, είναι θεωρητικώς αποδεκτή. Στην Ενότητα 3.2 αποδείχθηκε ότι η συγκεκριμένη λύση εξετάζει το έδαφος στην οριακή κατάσταση πριν την πλαστική διαρροή, συνεπώς θεωρητικά επιτρέπεται η χρήση ελαστικών λύσεων. Επίσης για την εξαγωγή της λύσης δεν έχει χρησιμοποιηθεί ο περιορισμός της ομοιόμορφης κατανομής των αδρανειακών δυνάμεων, όπως γίνεται με την περιστροφή του συστήματος αναφοράς (Mylonakis et al., 2007).

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η προτεινόμενη διαδικασία είναι πολύ πιο τεκμηριωμένη θεωρητικά από την αντίστοιχη διαδικασία των Steedman & Zeng (1990). Επιπλέον είναι και μαθηματικά πιο ορθή, καθώς η λύση των Steedman & Zeng (1990) δεν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Στην προτεινόμενη λύση, ο υπολογισμός της δυναμικής απόκρισης του ελαστικού εδαφικού στρώματος βασίζεται στην επίλυση των κυματικών εξισώσεων για τις πραγματικές συνοριακές συνθήκες, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4.

Στη βάση του ομογενούς, ισότροπου και απόλυτα ελαστικού εδαφικού στρώματος εφαρμόζεται αρμονική διέγερση \ddot{X}_g . Το εδαφικό στρώμα είναι θεμελιωμένο επί βράχου, για τον οποίο γίνονται δύο υποθέσεις: α) ανένδοτος (συνθήκες πλήρους πάκτωσης) και β) ενδόσιμος (συνθήκες μερικής πάκτωσης). Η απόκριση της ελεύθερης επιφάνειας του εδάφους συμβολίζεται με u_{ff0} , ενώ η απόκριση στη διεπιφάνεια βράχου – εδάφους στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζεται με u_{r0} . Η οριζόντια αρμονική διέγερση στον υποκείμενο βράχο παράγει διατμητικά κύματα τα οποία διαδίδονται κατακόρυφα μέσα στο υπερκείμενο εδαφικό στρώμα, και δίνουν τη γνωστή λύση για τη μετακίνηση στο επίχωμα:

$$u(z, t) = A e^{i(\omega t + kz)} + B e^{i(\omega t - kz)} \tag{3.5}$$

όπου k ο κυματικός αριθμός (ω/V_s) και A, B το εύρος των διαδιδόμενων κυμάτων.



Σχήμα 3.4 Δυναμική απόκριση ομοιογενούς, ελαστικού, εδαφικού στρώματος θεμελιωμένου σε (α) ανένδοτο βράχο και (β) Ενδόσιμο βράχο

3.2.2.2 Συνοριακές συνθήκες και συναρτήσεις σχήματος

Αν εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες, η λύσεις που λαμβάνονται είναι:

α) Ανένδοτος Βράχος: Στην ελεύθερη επιφάνεια ($z = 0$) οι διατμητικές τάσεις πρέπει να μηδενίζονται, συνεπώς η συνθήκη $\partial u(0, t) / \partial z = 0$ ικανοποιείται μόνο αν $A = B$. Με αντικατάσταση στη σχέση (3.5) προκύπτει η έκφραση (3.6).

$$u(z, t) = 2A \cos(kz) e^{i\omega t} \tag{3.6}$$

Λαμβάνοντας το λόγο των μετακινήσεων στην ελεύθερη επιφάνεια και στη βάση του εδαφικού στρώματος, εξάγεται η συνάρτηση μεταφοράς $F_1(\omega)$:

$$F_1(\omega) = \frac{u_{\max}(0, t)}{u_{\max}(H, t)} = \frac{2Ae^{i\omega t}}{2A \cos(kH)e^{i\omega t}} = \frac{1}{\cos(kH)} = \frac{1}{\cos(\omega H / V_s)} \quad (3.7)$$

όπου V_s η (όχι μιγαδική) ταχύτητα των κυμάτων-S στο εδαφικό υλικό.

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η μετακίνηση της επιφάνειας είναι τουλάχιστον ίση με τη μετακίνηση του υποκείμενου βράχου (αφού ο παρανομαστής είναι πάντα μικρότερος της μονάδας), ενώ μπορεί να πάρει πολύ μεγαλύτερες τιμές για ορισμένες συχνότητες διέγερσης. Η απόκριση του ανένδοτου βράχου δεν επηρεάζεται από την απόκριση του υπερκείμενου στρώματος, και ανακλά πλήρως τα ελαστικά κύματα που ταξιδεύουν στο ελαστικό μέσο, εγκλωβίζοντας μέσα στο στρώμα όλη την μηχανική ενέργεια. Ακολουθώντας τη μετακίνηση, η κατανομή των επιταχύνσεων με το βάθος δίνεται από την Εξ. (3.8)

$$a_h(z) = a_{h0} \cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right) = a_{h0} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{z}{H}\right) \quad (3.8)$$

όπου a_{h0} το πλάτος της επιτάχυνσης στην ελεύθερη επιφάνεια, ω η κυκλική συχνότητα της διέγερσης και $\omega_1 = \pi V_s / 2H$ η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα του εδαφικού στρώματος.

β) Ενδόσιμος Βράχος: Εάν ο βράχος είναι ενδόσιμος, τα κατακορύφως διαδιδόμενα κύματα δεν ανακλώνται πλήρως φτάνοντας στη διεπιφάνεια βράχου – εδάφους. Ένα μέρος της ενέργειας τους θα περάσει τη διεπιφάνεια αυτή οπότε η διάδοση τους θα συνεχιστεί και μέσα στο βράχο, και επομένως αυτή η ενέργεια θα αφαιρεθεί από το ελαστικό εδαφικό στρώμα. Το παραπάνω φαινόμενο λειτουργεί ως μια μορφή απόσβεσης η οποία έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του εύρους των μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους σε σχέση με τον ανένδοτο βράχο.

Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις των κατακορύφως διαδιδόμενων κυμάτων-S γίνονται:

$$u_s(z_s, t) = A_s e^{i(\omega t + k_s z_s)} + B_s e^{i(\omega t - k_s z_s)} \quad (3.9\alpha)$$

$$u_r(z_r, t) = A_r e^{i(\omega t + k_r z_r)} + B_r e^{i(\omega t - k_r z_r)} \quad (3.9\beta)$$

όπου τα σύμβολα s και r αναφέρονται στο έδαφος και στο βράχο, αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας πάλι τις συνοριακές συνθήκες, από το φυσικό όριο της ελεύθερης επιφάνειας λαμβάνεται $A_s = B_s$, και από τη συνθήκη ισότητας των μετακινήσεων και της συνέχειας των τάσεων στη διεπιφάνεια βράχου - εδάφους (Εξ. 3.10α,β), λαμβάνεται η Εξ.(3.11):

$$u_s(z_s = H) = u_r(z_r = 0) \quad (3.10α)$$

$$\tau_s(z_s = H) = \tau_r(z_r = 0) \quad (3.10β)$$

$$\frac{G_s k_s}{G_r k_r} = A_s (e^{ik_s H} - e^{-ik_s H}) = A_r - B_r \quad (3.11)$$

όπου $G_s k_s / G_r k_r = \rho_s V_{ss} / \rho_r V_{rr} = I_r$ ο λόγος της εδαφικής εμπέδησης (Αθανασόπουλος, 2004; Kramer, 1996) και V_{ss} , V_{rr} οι ταχύτητες διάδοσης των διατμητικών κυμάτων στο έδαφος και στο βράχου αντίστοιχα. Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται ως ο λόγος της διέγερσης στην ελεύθερη επιφάνεια προς τη διέγερση στον βράχο, παίρνει τη μορφή της Εξ. (3.12) και ακολούθως η κατανομή των επιταχύνσεων ισούται με την Εξ. (3.13)

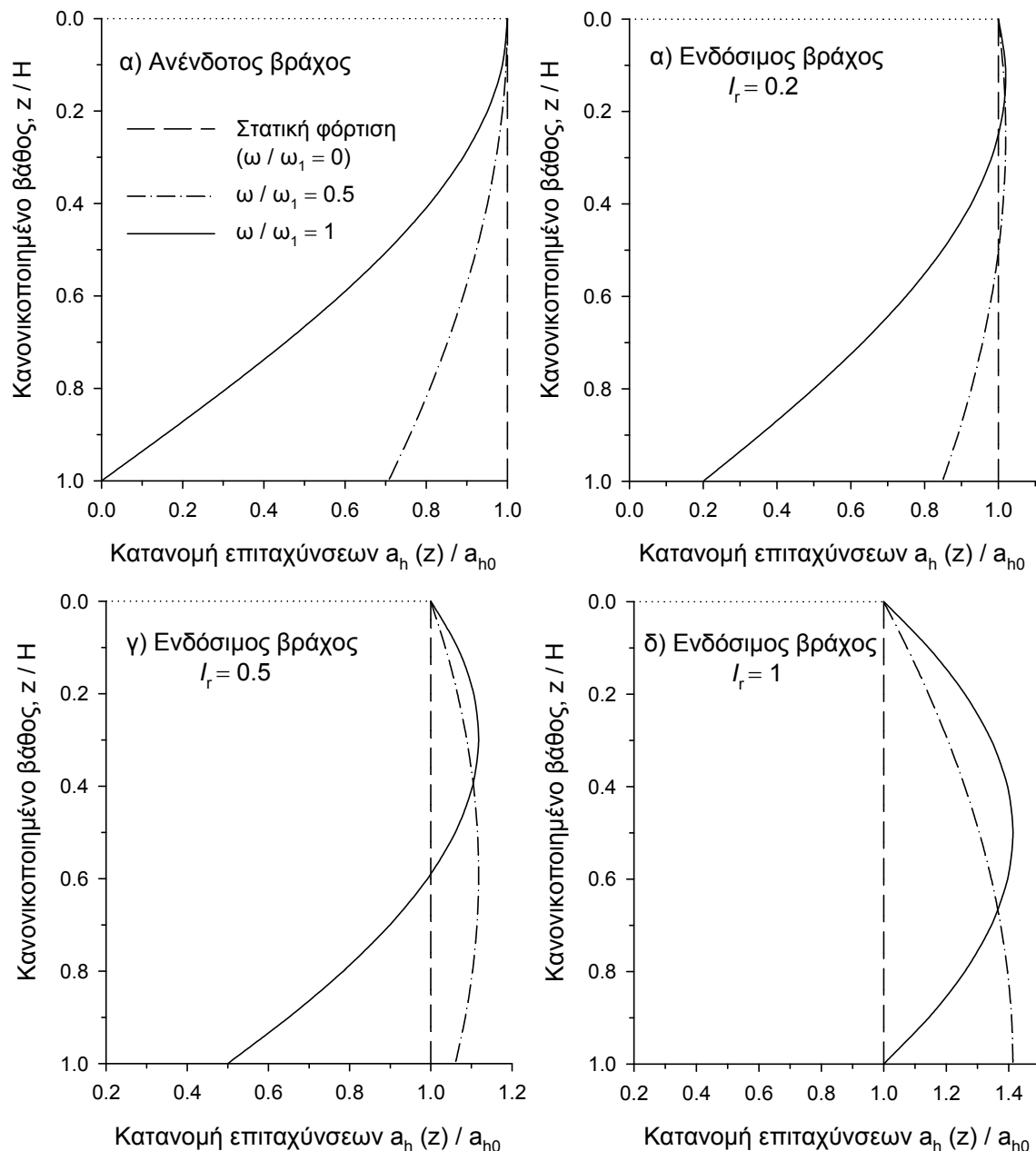
$$F_2(\omega) = \frac{u_{\max}(0, t)}{u_{\max}(H, t)} = \frac{u_{ff0}}{u_{r0}} = \frac{1}{\cos(\omega H / V_s) + I_r \sin(\omega H / V_s)} \quad (3.12)$$

$$a_h(z) = a_{h0} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{z}{H}\right) + I_r \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{z}{H}\right) \right] \quad (3.13)$$

Η Εξ. (3.13) φυσιολογικά συγκλίνει στην Εξ. (3.8) όσο μικραίνει ο λόγος I_r , ενώ η απόκριση της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να γίνει και μικρότερη από την απόκριση του υποκείμενου εδάφους για συγκεκριμένες τιμές του λόγου I_r και της συχνότητας διέγερσης.

Τυπικές κατανομές επιταχύνσεων με το βάθος για ανένδοτο και ενδόσιμο βράχο με $I_r = 0.2, 0.5$ και 1 , για διάφορες τιμές της συχνότητας διέγερσης ω παρουσιάζονται σε αδιάστατη μορφή στο Σχ. 3.5. Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι η δυναμική απόκριση

του εδαφικού στρώματος σε ανένδοτο υπόστρωμα μειώνει τα αδρανειακά φορτία κοντά στην βάση του τοίχου, με αποτέλεσμα η δυναμική συνιστώσα της εδαφικής ώθησης να ανεβαίνει ψηλότερα από το 1/3 του ύψους. Η προσθήκη της ενδοσιμότητας του υποστρώματος αυξάνει τις επιταχύνσεις όσο αυξάνεται ο λόγος I_r , μέχρι που γίνονται μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες ψευδοστατικές με αποτέλεσμα, εκτός της ανύψωσης του σημείου εφαρμογής, να αυξάνεται και η συνολική σεισμική ώθηση.



Σχήμα 3.5 Κατανομές επιταχύνσεων για διάφορες συχνότητες διέγερσης στην περίπτωση ανένδοτου και ενδόσιμου υποστρώματος ($I_r = 0.2, 0.5$ και 1)

3.2.2.3 Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

Στα Σχ. 3.6 – 3.8 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την κατανομή των σεισμικών ωθήσεων και το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης ώθησης και της σεισμικής συνιστώσας. Μετά την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης σχήματος για την κατανομή των επιταχύνσεων, η συνολική ώθηση και το σημείο εφαρμογής της προκύπτει με αριθμητική ολοκλήρωση των αποτελεσμάτων της Εξ. (3.4), με κατάλληλη μέθοδο (π.χ. με τον κανόνα του τραπεζίου). Η θέση του σημείου εφαρμογής της συνολικής σεισμικής ώθησης υπολογίζεται εφαρμόζοντας το γνωστό θεώρημα των ροπών (Εξ. 3.14)

$$h_a = \frac{M_e}{P_e} = \frac{\sum P_i h_i}{\sum P_i} \quad (3.14)$$

Ακολουθώντας την πρακτική της διεθνούς βιβλιογραφίας (Seed & Whitman; 1970), η σεισμική συνιστώσα της συνολικής εδαφικής ώθησης ορίζεται ως η διαφορά της ώθησης με σεισμό και της βαρυτικής ώθησης $\Delta P_e = P_e - P_{st}$, η οποία έχει νόημα από μαθηματική σκοπιά, καθώς τα διανύσματα P_e και P_{st} είναι συγγραμμικά. Ωστόσο, η φυσική σημασία του ΔP_e είναι περιορισμένη δεδομένου ότι τα πεδία των τάσεων (και οι αντίστοιχοι μηχανισμοί αστοχίας) στα δύο προβλήματα είναι διαφορετικοί. Επιπλέον, η διαφορά ΔP_e δεν μπορεί να ερμηνευτεί στα πλαίσια της οριακής ανάλυσης, καθώς δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω όριο της πραγματικής τιμής (Mylonakis et al., 2007). Η κανονικοποιημένη εκκεντρότητα της σεισμικής συνιστώσας υπολογίζεται ως:

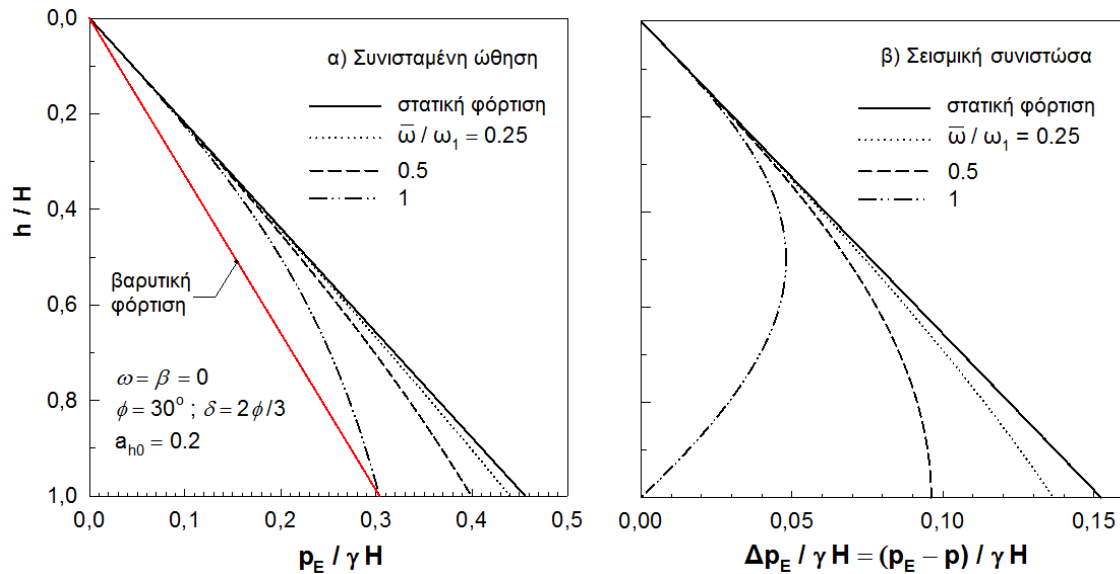
$$\frac{h_{a,e}}{H} = \frac{P_e(h_a / H) - P_{st}(h_{a,st} / H)}{P_e - P_{st}} \quad (3.15)$$

όπου $h_{a,e}$ το σημείο εφαρμογής της σεισμικής συνιστώσας, $h_{a,st}$ το σημείο εφαρμογής της βαρυτικής ώθησης και h_a το σημείο εφαρμογής της συνολικής ώθησης.

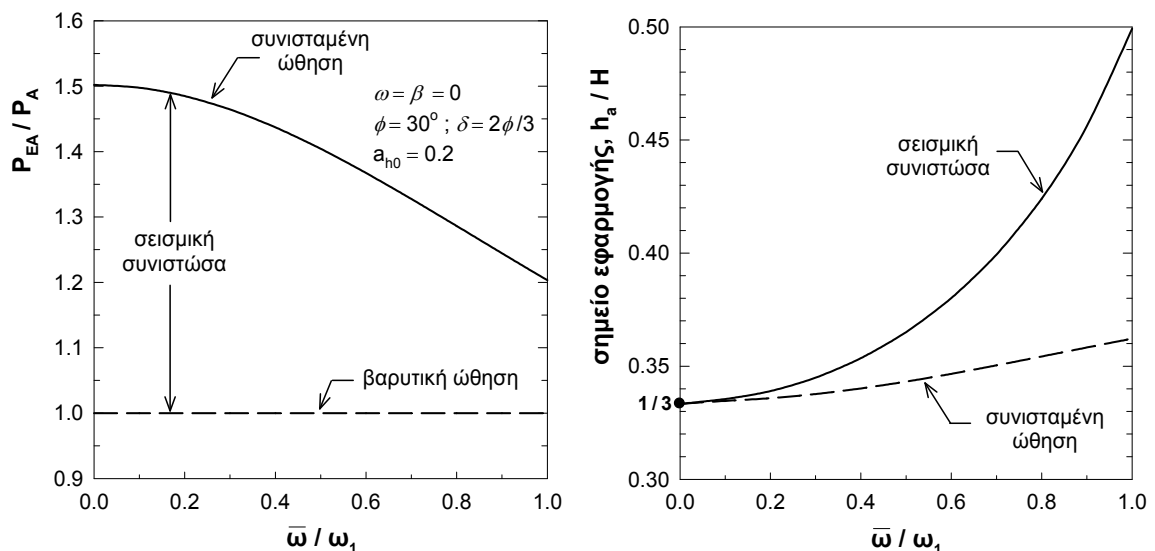
Για την περίπτωση ανέδωτου βράχου, οι κατανομές των ωθήσεων που προκύπτουν απεικονίζονται στο Σχ. 3.6, όπου φυσιολογικά φαίνεται ότι όσο πλησιάζει η συχνότητα διέγερσης προς το συντονισμό, τόσο αυξάνει η απόκλιση από την τριγωνική κατανομή. Η νέα κατανομή δίνει μικρότερη συνολική ώθηση (Σχ. 3.7α), αλλά υψηλότερο σημείο εφαρμογής (Σχ. 3.7β), με τη μέγιστη ανύψωση να παρατηρείται στον συντονισμό ($\omega/\omega_1 = 1$), κινούμενο προς το κοντά στο $H/2$ για τη σεισμική συνιστώσα της ώθησης. Το

σημείο εφαρμογής της συνολικής ώθησης έχει λιγότερο αισθητή μεταβολή.

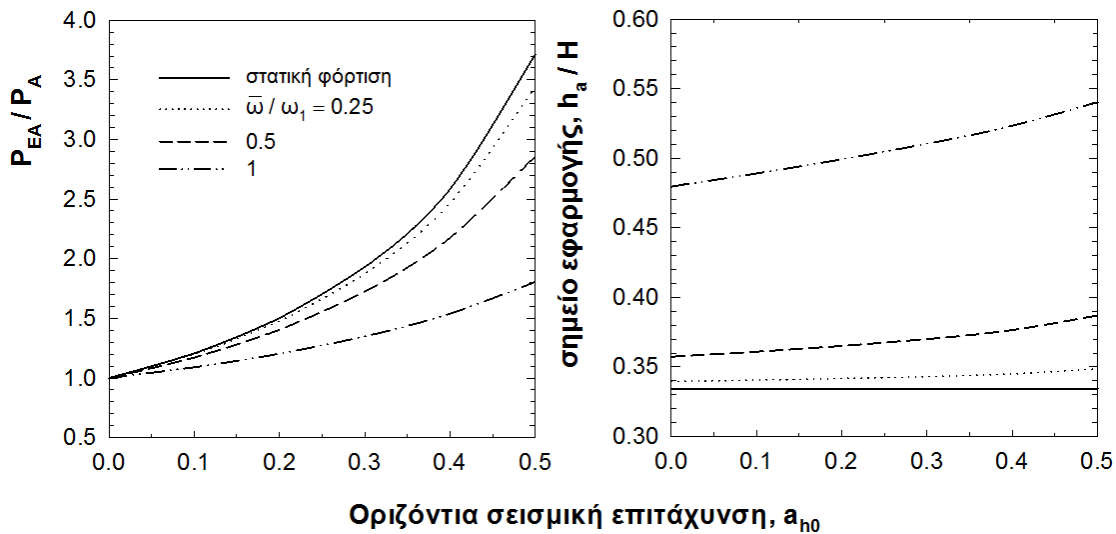
Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχ. 3.8, ως συνάρτηση της οριζόντιας σεισμικής επιτάχυνσης, a_{ho} , από τα οποία φαίνεται ότι η τελευταία επιδρά κυρίως στο μέγεθος της σεισμικής ώθησης και επηρεάζει λιγότερο τη θέση του σημείου εφαρμογής, προκαλώντας πολύ μικρή αύξηση.



Σχήμα 3.6 Κατανομή εδαφικών ωθήσεων: α) Συνολική ώθηση, β) Σεισμική συνιστώσα



Σχήμα 3.7 Μεταβολή του μεγέθους και του σημείου εφαρμογής της σεισμικής ώθησης συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης



Σχήμα 3.8 Επίδραση της μέγιστης σεισμικής επιτάχυνσης στο μέγεθος και στο σημείο εφαρμογής της ώθησης, για διάφορες συχνότητες διέγερσης

3.3 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΤΟΥ ΤΟΙΧΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ

3.3.1 Μέθοδος Dubrova (1963)

Η ανάλυση που προτάθηκε από την Dubrova (1963) για την εκτίμηση της επίδρασης των κινηματικών συνθηκών, όπως εξηγείται από τον Haft (1966, 1975), θα εφαρμοστεί και θα διερευνηθεί στο πλαίσιο της παρούσας οριακής ανάλυσης τάσεων.

Η βασική ιδέα της Dubrova στηρίζεται στο γεγονός ότι η αστοχία της εδαφικής μάζας πίσω από τον τοίχο αντιστήριξης εξαρτάται άμεσα από την αναπτυσσόμενη διατμητική παραμόρφωση, η οποία με τη σειρά της σχετίζεται με τη μορφή της μετατόπισης του τοίχου (π.χ. περιστροφή περί τη βάση ή περί την κορυφή). Για να ληφθούν υπόψη τα παραπάνω, η μέθοδος της Dubrova υποθέτει ότι υπάρχει βαθμιαία κινητοποίηση της διατμητικής αντοχής του επιχώματος καθ' ύψος, κατ' αναλογία με τη μετατόπιση του τοίχου, και προτείνει τη χρήση μεταβλητών με το βάθος τιμών για τις παραμέτρους διατμητικής αντοχής του εδάφους και της διεπιφάνειας (γωνίες φ και δ_w αντίστοιχα).

Με βάση το σκεπτικό της Dubrova, η αστοχία εξελίσσεται πλήρως στο άκρο εκείνο του τοίχου όπου η μετατόπιση είναι μέγιστη (και συνεπώς η τιμή των γωνιών φ και δ_w

γίνεται ίση με την κρίσιμη ή την παραμένουσα τιμή) και περιορίζεται σταδιακά μέχρι το σημείο όπου η μετατόπιση είναι μηδενική και οι πλευρικές ωθήσεις προσεγγίζονται από το γινόμενο $K_0\sigma_z$. Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης σχήματος για τη μεταβολή των παραμέτρων διατμητικής αντοχής παρουσιάζεται σε επόμενη ενότητα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι οι προαναφερθείσες μορφές μετατόπισης του τοίχου (περιστροφή περί την κορυφή ή τη βάση) είναι δύο ανάμεσα σε άπειρες δυνατές μορφές μετατόπισης και εξετάζονται ως οι πλέον ενδεικτικές για τους άκαμπτους τοίχους βαρύτητας. Ακόμα πιο σύνθετη είναι η κινηματική και οι κατανομές ωθήσεων σε εύκαμπτους πασσαλότοιχους με αντηρίδες ή αγκυρώσεις (Peck, 1969; Clayton et al., 1993).

3.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου Dubrova στην οριακή ανάλυση τάσεων

3.3.2.1 Πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας

Ελλείπει καλύτερου διαθέσιμου θεωρητικού εργαλείου, τόσο η Dubrova όσο και το σύνολο των μετέπειτα ερευνητών που εργάστηκαν στη συγκεκριμένη ιδέα, (Harr, 1966, 1977; Saran & Prakash, 1977; Chen & Liu 1990; Chang, 1981; 1997) βασίστηκαν στην εξίσωση Coulomb (ή την Mononobe - Okabe) η οποία από τη φύση της δεν παρέχει πληροφορία για τάσεις, παρά μόνο για τη συνολική ώθηση. Επομένως η χρήση της μπορεί να γίνει μόνο με μεγάλες προσεγγίσεις ή σύνθετες παραγωγίσεις που είναι ευαίσθητες σε αλγεβρικά σφάλματα (π.χ. Chen & Liu, 1990).

Αντίθετα, η οριακή ανάλυση τάσεων παρέχει απευθείας την τιμή της τάσης σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου και μπορεί να ενσωματώσει εύκολα μεταβλητές τιμές παραμέτρων ως συνάρτηση του βάθους. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η μεταβολή στις τιμές των παραμέτρων διατμητικής αντοχής εδάφους και διεπιφάνειας, δηλαδή η μεταβολή των περιβαλλουσών των κριτηρίων αστοχίας, δίνει απευθείας την κατανομή των τάσεων (ορθών και διατμητικών) πάνω στον τοίχο, στην εξής απλή διατύπωση:

$$K(z) = \frac{\cos(\omega - \beta) \cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e \cos \delta_w(z) \cos^2 \omega} \left[\frac{1 - \sin \phi(z) \cos(\Delta_2(z) - \delta_w(z))}{1 + \sin \phi(z) \cos(\Delta_{1e}(z) + \beta + \psi_e)} \right] e^{-2\theta_{AB}(z) \tan \phi(z)} \quad (3.16)$$

με τις ποσότητες Δ_{1e} , Δ_2 και θ_{AB} να είναι μεταβλητές με το βάθος, βάσει των συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\delta_w(z)$.

Η μεταβολή της τραχύτητας της διεπιφάνειας $\delta_w(z)$, στην παρούσα ανάλυση ακολουθεί την ίδια συνάρτηση σχήματος με τη γωνία τριβής του εδάφους $\varphi(z)$, με βάση τη σχέση αναλογίας $\delta_w(z) = m\varphi(z)$ για $0 \leq m \leq 1$ (Harr, 1966). Πρόκειται απλώς για μια βολική, αλλά όχι δεσμευτική υπόθεση. Επιπλέον η μεταβολή της παραμέτρου δ_w δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και σταθερή τιμή του δ , ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί (Chen & Liu, 1990). Είναι προφανές ότι η χρήση μεταβλητών τιμών $\delta_w(z)$ απαιτεί ξεχωριστή αριθμητική ολοκλήρωση των ορθών και διατμητικών τάσεων πάνω στον τοίχο, καθώς τα διανύσματα της συνολικής ώθησης με το βάθος δεν είναι συγγραμμικά. Τέλος, ανεξάρτητα από τη μεταβολή των παραμέτρων φ και δ_w λόγω κινηματικών συνθηκών, η Εξ. (3.16) μπορεί να συνδυαστεί με την κυματική λύση της Ενότητας 3.2, με την εισαγωγή μεταβλητής σεισμικής γωνίας $\psi_e(z)$.

Το δεύτερο πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου είναι η συμμετρία της Εξ. (3.16) που δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού τόσο ενεργητικών όσο και παθητικών ωθήσεων με κατάλληλη προσήμανση στις τιμές των φ και δ_w (θετικές τιμές για ενεργητικές, αρνητικές τιμές για παθητικές). Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει τη χρήση μίας μόνο έκφρασης και μίας συνάρτησης σχήματος για την περιγραφή οποιασδήποτε μετάβασης από ενεργητική σε παθητική κατάσταση, όπως φαίνεται στην υποενότητα που ακολουθεί. Αυτό δεν ισχύει για την εξίσωση Mononobe – Okabe (το πρόσημο της ρίζας στον παρανομαστή της εξίσωσης δε μεταβάλλεται) και για το λόγο αυτό στην κλασική μέθοδο Dubrova χρησιμοποιούνται διαφορετικές εξισώσεις για την ενεργητική και την παθητική κατάσταση.

3.3.2.2 Συναρτήσεις Σχήματος για την μεταβολή των παραμέτρων φ και δ_w

Η θεώρηση μεταβλητών παραμέτρων αντοχής με το βάθος επιβάλλεται από την εξάρτηση της αστοχίας από τις αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις και κατ' επέκταση από την κινηματική του τοίχου. Στην περίπτωση που ο τοίχος μετατοπίζεται στρεφόμενος περί την κορυφή ή τη βάση του, υπάρχει μία βαθμιαία ανάπτυξη των παραμορφώσεων, από μηδενικές (στο σημείο περιστροφής) έως μέγιστες (στο στρεφόμενο άκρο). Είναι λογικό λοιπόν να θεωρηθεί πως η αστοχία στο εδαφικό μέσο, ακολουθώντας τις παραμορφώσεις, εξελίσσεται προοδευτικά. Δηλαδή πλήρης ενεργητική ή παθητική αστοχία παρατηρείται στο στρεφόμενο άκρο, όπου οι γωνίες τριβής εδάφους και διεπιφάνειας παίρνουν τις κρίσιμες τιμές τους, φ και δ_w (ή $-\varphi$ και $-\delta_w$) αντίστοιχα. Κοντά στο σημείο περιστροφής, η

εντατική κατάσταση περιγράφεται από τη γεωστατική ισορροπία των τάσεων σε ηρεμία (κατάσταση K_0). Για να υπολογιστούν οι τάσεις στα υπόλοιπα σημεία του μέσου, χρησιμοποιούνται ενδιάμεσες τιμές για τις παραμέτρους αντοχής κατά μήκος του τοίχου, οι οποίες εκφράζουν το βαθμό κινητοποίησης της διατμητικής αντοχής. Πρέπει να τονιστεί πως δεν πρόκειται για πραγματικές γωνίες τριβής του εδαφικού μέσου και της διεπιφάνειας, παρά μόνο για τις «κινητοποιούμενες» τιμές για τις ανάγκες της οριακής ανάλυσης τάσεων.

Στα Σχ. 3.9 και 3.10 απεικονίζεται με τη βοήθεια των κύκλων Mohr, η μετάβαση από την κατάσταση γεωστατικής ισορροπίας (K_0) στην κατάσταση ενεργητικής ή παθητικής αστοχίας. Η ισοδύναμη τιμή ϕ_0 που αντιστοιχεί στην κατάσταση γεωστατικής ισορροπίας προσδιορίζεται με τη βοήθεια της ημιεμπειρικής – προσεγγιστικής σχέσης $K_0 = 1 - \sin \phi$ (Jaky, 1944) και του κύκλου Mohr, οπότε προκύπτει η Εξ. (3.17)

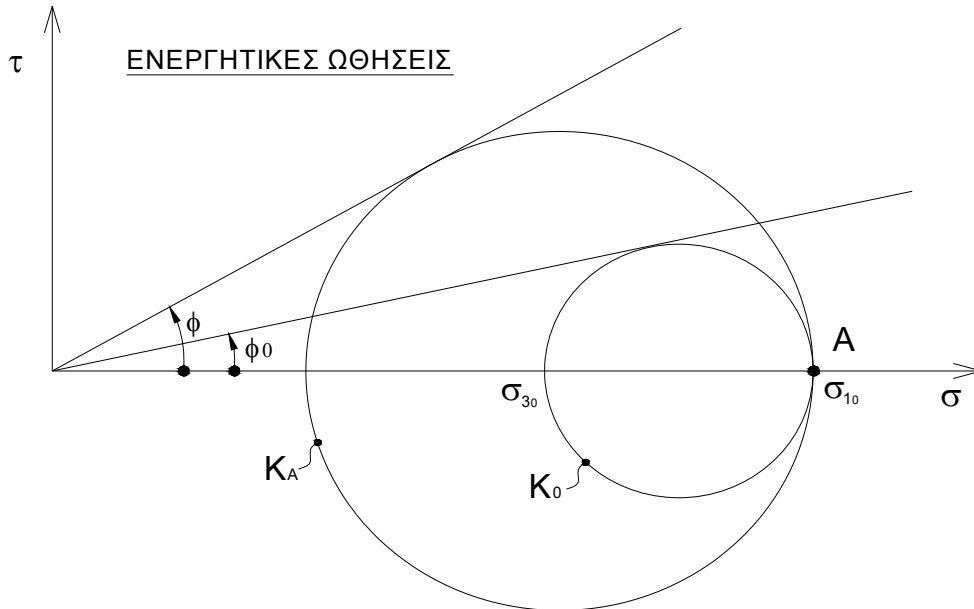
$$\phi_0 = \sin^{-1} \left(\frac{(\sigma_{10} - \sigma_{30}) / 2}{(\sigma_{10} + \sigma_{30}) / 2} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1 - K_0}{1 + K_0} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{2 - \sin \phi} \right) \quad (3.17)$$

Η παραπάνω τιμή τροποποιείται όταν η επιφάνεια του εδάφους είναι κεκλιμένη (κλίση πρανούς β), σύμφωνα με την Εξ. (3.18) (Chen & Liu, 1990)

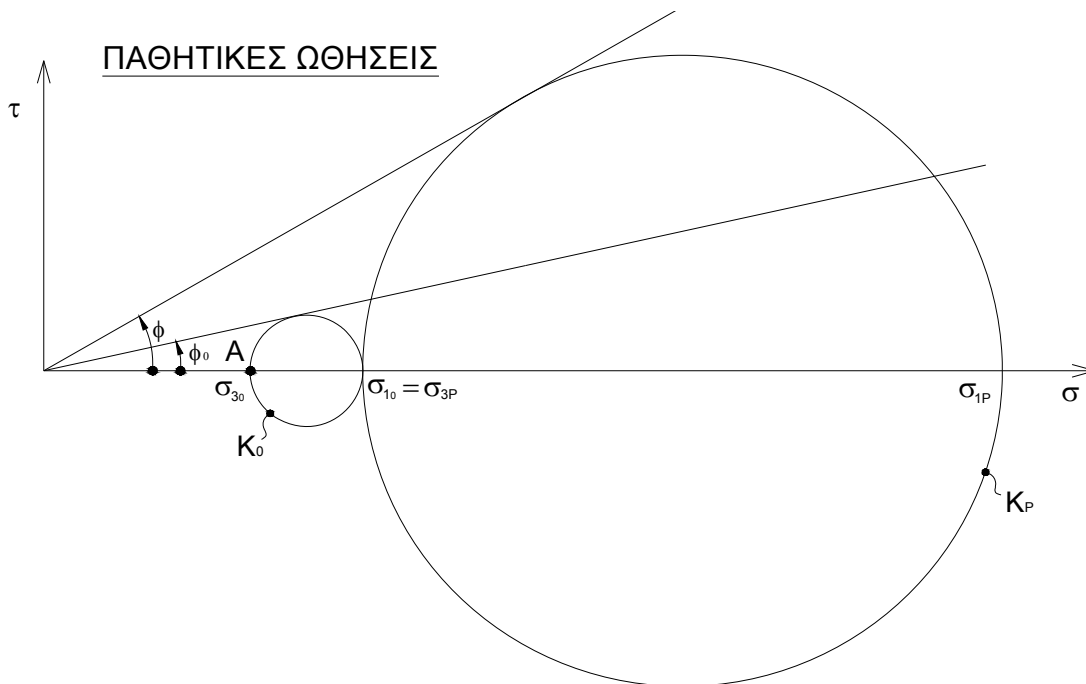
$$\phi'_0 = \phi_0 + (\phi - \phi_0) \frac{\tan \beta}{\tan \phi} \quad (3.18)$$

Για την περίπτωση της παθητικής μετακίνησης του τοίχου, από το Σχ. 3.10 φαίνεται ότι οι ωθήσεις πάνω στον τοίχο ξεκινούν στην ισορροπία από την ελάχιστη κύρια τάση σ_{30} (για $\varphi(z) = \varphi_0$), στη συνέχεια αυξάνονται πλησιάζοντας την σ_{10} , η οποία παραμένει σταθερή καθώς εκφράζει την κατακόρυφη ορθή τάση (βαρύτητα). Ο κύκλος Mohr επομένως μικραίνει μέχρι η σ_3 γίνει ίση με την σ_{10} (ισοτροπική εντατική κατάσταση ($\varphi(z) = 0$)). Στη συνέχεια η σ_3 γίνεται μέγιστη κύρια τάση και αυξάνει μέχρι να φτάσει στη παθητική κατάσταση αστοχίας ($\varphi(z) = -\varphi$). Αυτό σημαίνει ότι η συγκεκριμένη μετάβαση περιγράφεται στο πρώτο τμήμα της από τον «ενεργητικό» κύκλο και στο δεύτερο από τον «παθητικό», κάτι που είναι εφικτό μέσω της Εξ. (3.16) βάσει μιας κατάλληλης συνάρτησης σχήματος $\varphi(z)$. Η παρατήρηση αυτή φαίνεται να αγνοείται στην ανάλυση των Chang, (1981) και Chen & Liu, (1990) οι οποίοι εφαρμόζουν χωρίς τεκμηρίωση μια

γραμμική μετάβαση από την τιμή ϕ_0 στην τιμή ϕ , χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς τους την εξίσωση Μονοποβε – Okabe για παθητικές συνθήκες.



Σχήμα 3.9 Μετάβαση από τη γεωστατική ισορροπία στην κατάσταση ενεργητικής αστοχίας



Σχήμα 3.10 Μετάβαση από τη γεωστατική ισορροπία στην κατάσταση παθητικής αστοχίας

Η ακριβής μορφή της μετάβασης από την κατάσταση γεωστατικής ισορροπίας (ϕ_0) στην κατάσταση ενεργητικής ή παθητικής αστοχίας (ϕ ή $-\phi$) δεν είναι γνωστή και επομένως πρέπει να υποτεθεί κάποια συνάρτηση σχήματος για την περιγραφή της. Ακριβέστερος υπολογισμός της κινητοποιούμενης τιμής της ϕ σε σχέση με την αναπτυσσόμενη παραμόρφωση, μπορεί να γίνει από πειραματικά αποτελέσματα δοκιμών τριαξονικής φόρτισης, ωστόσο παραμένει το πρόβλημα της συσχέτισης των μετακινήσεων του τοίχου με την τιμή της παραμόρφωσης σε κάθε σημείο. Για το λόγο αυτό, η παρούσα εργασία περιορίζεται στην εξέταση απλοποιημένων συναρτήσεων σχήματος (γραμμική, δι-γραμμική, ημιτονική, παραβολική), οι οποίες, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, δίνουν παρόμοιες κατανομές ωθήσεων και ερμηνεύουν ικανοποιητικά τα αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων.

α) Γραμμική κατανομή: Πρόκειται για την πιο απλή συνάρτηση σχήματος η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\phi(0) = \phi$ ή $-\phi$, $\phi(H) = \phi_0$ για περιστροφή περί τη βάση, και $\phi(0) = \phi_0$, $\phi(H) = \phi$ ή $-\phi$ για περιστροφή περί την κορυφή, όπως προκύπτει από τις Εξ. (3.19α,β).

$$\phi(z) = \phi + (\phi_0 - \phi) \frac{z}{H} \quad (3.19\alpha)$$

$$\phi(z) = \phi_0 + (\phi - \phi_0) \frac{z}{H} \quad (3.19\beta)$$

β) Δι-γραμμική κατανομή: Η συγκεκριμένη κατανομή βασίζεται σε πειραματικές παρατηρήσεις που δείχνουν ότι στην περίπτωση της περιστροφής περί τη βάση, μια ολόκληρη ζώνη κοντά στην κορυφή του τοίχου (μέχρι περίπου $z/H = 1/2$) βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας (σταθερό $\phi(z) = \phi$ ή $-\phi$), ενώ στο υπόλοιπο τμήμα μεταβάλλεται μέχρι την τιμή $\phi(H) = \phi_0$. Στην περιστροφή περί την κορυφή οι βέλτιστες κατανομές ωθήσεων προκύπτουν με θεώρηση σταθερής τιμής ϕ_0 κοντά στην κορυφή και στη συνέχεια μετάβαση στην τιμή $\phi(H) = \phi$ (Kloukinas et al., 2007). Οι σχετικές συναρτήσεις για περιστροφή περί τη βάση και περί την κορυφή παίρνουν τη μορφή των Εξ. (3.20α) και (3.20β) αντίστοιχα

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 \leq \frac{z}{H} \leq 0.5, & \phi \\ 0.5 \leq \frac{z}{H} \leq 1, & \phi + (\phi_0 - \phi) \left(2 \frac{z}{H} - 1 \right) \end{cases} \quad (3.20\alpha)$$

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 \leq \frac{z}{H} \leq 0.5, & \phi_o \\ 0.5 \leq \frac{z}{H} \leq 1, & \phi_o + (\phi - \phi_o) \left(2 \frac{z}{H} - 1 \right) \end{cases} \quad (3.20\beta)$$

Επειδή η χρήση τέτοιων συναρτήσεων που αποτελούνται από δύο κλάδους δεν είναι συνήθως βολική, οι παραπάνω κατανομές μπορούν να εξομαλυνθούν με τη χρήση τριγωνομετρικών ή παραβολικών συναρτήσεων.

γ) Ημιτονική κατανομή: Με τη χρήση της ημιτονικής συνάρτησης, όπως φαίνεται στις Εξ. (3.21α) και (3.21β) για περιστροφή περί τη βάση και περί την κορυφή αντίστοιχα, ικανοποιούνται οι συνοριακές τιμές στα άκρα και η επιθυμητή μορφή μετάβασης (διατήρηση τιμών κοντά στο ϕ ή στο ϕ_o αντίστοιχα κοντά στην κορυφή του τοίχου)

$$\phi(z) = \phi + (\phi_o - \phi) \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \quad (3.21\alpha)$$

$$\phi(z) = \phi_o + (\phi - \phi_o) \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \quad (3.21\beta)$$

δ) Παραβολική κατανομή: Ακολούθως, οι αντίστοιχες εξισώσεις που εκφράζουν τη συνάρτηση σχήματος παραβολικής μορφής, παίρνουν τη μορφή των Εξ. (3.22α,β)

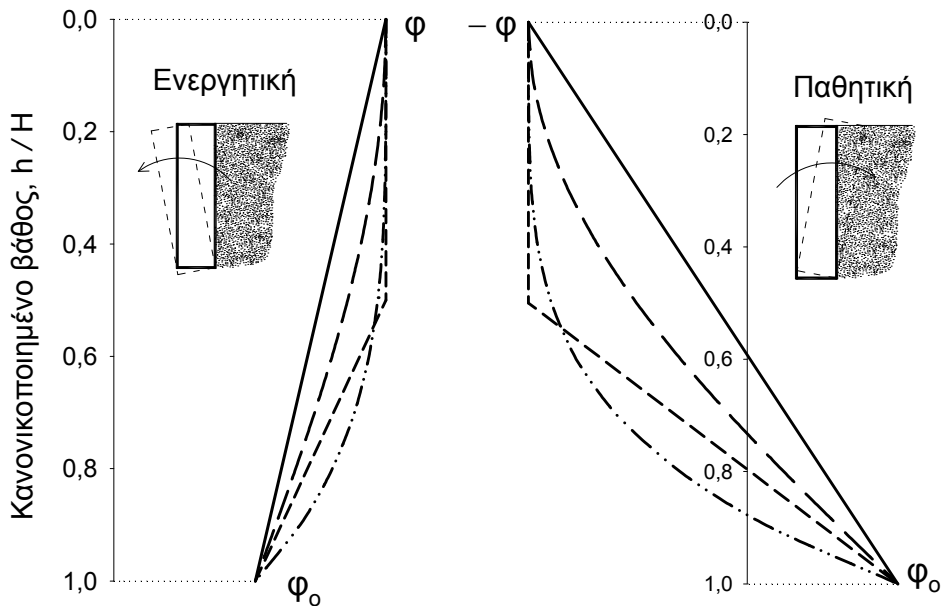
$$\phi(z) = \phi + (\phi_o - \phi) \left(\frac{z}{H}\right)^n \quad (3.22\alpha)$$

$$\phi(z) = \phi_o + (\phi - \phi_o) \left(\frac{z}{H}\right)^n \quad (3.22\beta)$$

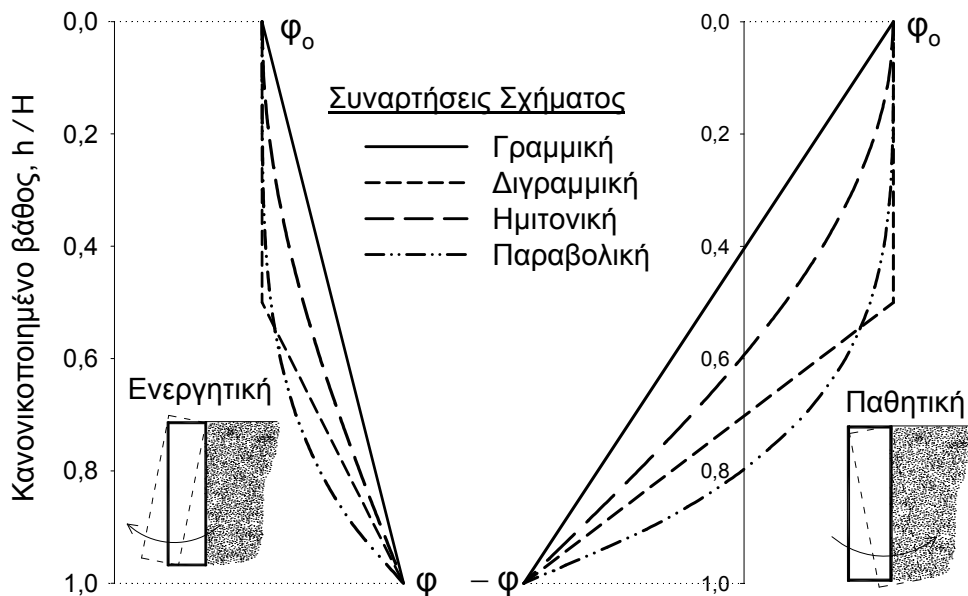
όπου n θετικός ακέραιος. Για τιμή $n = 2$ τα αποτελέσματα της παραβολικής κατανομής σχεδόν ταυτίζονται με την ημιτονική. Η μορφή όλων των συναρτήσεων σχήματος για ενεργητική και παθητική περιστροφή περί τη βάση ή την κορυφή απεικονίζονται στο Σχ. 3.11. Τα αποτελέσματα της παραβολικής κατανομής έχουν σχεδιαστεί για $n = 4$. Σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρείται ότι η δι-γραμμική, η ημιτονική και η παραβολική συνάρτηση σχήματος οδηγούν σε παραπλήσιες κατανομές της κινητοποιούμενης

διατμητικής αντοχής του εδάφους. Τα αποτελέσματα των κατανομών αυτών φαίνονται στο αριθμητικό παράδειγμα της επόμενης υποενότητας.

α) Περιστροφή περί τη βάση



β) Περιστροφή περί την κορυφή



Κινητοποιούμενη γωνία τριβής, $\varphi(h)$

Σχήμα 3.11 Συναρτήσεις σχήματος για την κινητοποιούμενη διατμητική αντοχή του εδάφους, στις περιπτώσεις ενεργητικής και παθητικής στρώσης του τοίχου περί την κορυφή και τη βάση του.

3.3.2.3 Τυπικές κατανομές ωθήσεων για τις διάφορες συναρτήσεις σχήματος και τις κινηματικές συνθήκες

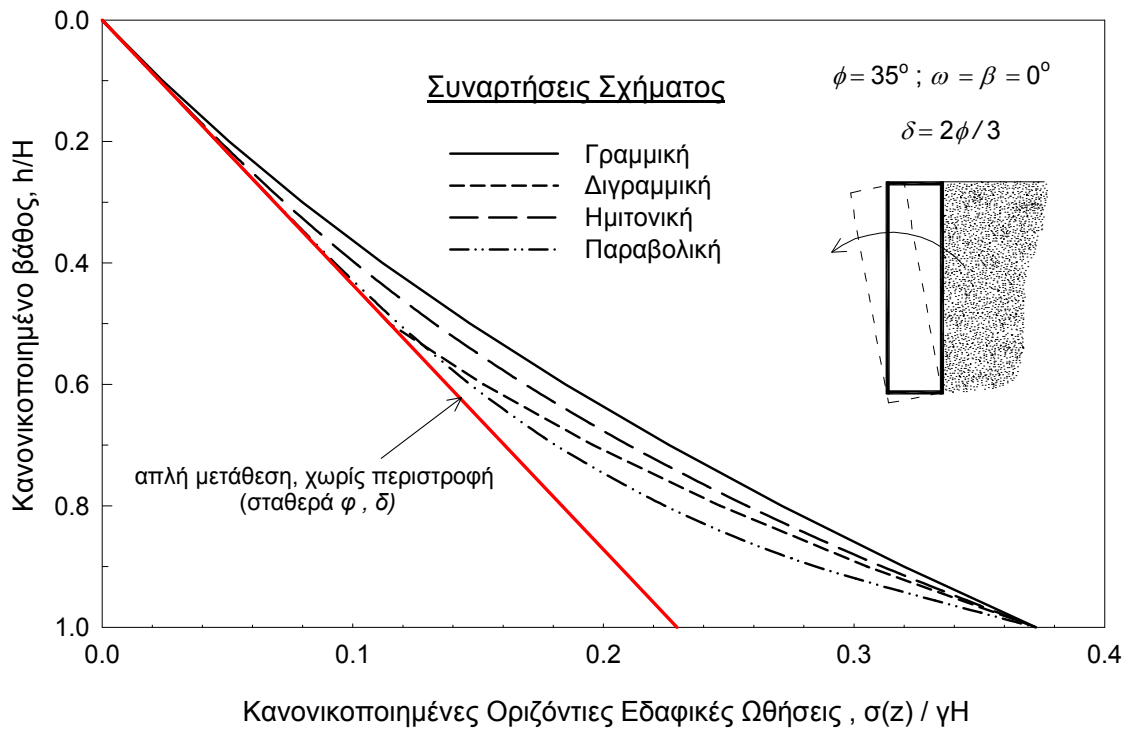
Τυπικά αποτελέσματα από την εφαρμογή των συναρτήσεων σχήματος που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, για κατανομές ωθήσεων σε κατακόρυφο τραχύ τοίχο ($\delta_w = 2\phi/3$) ο οποίος αντιστηρίζει οριζόντιο επίχωμα με γωνία τριβής $\phi = 30^\circ$, παρουσιάζονται στα Σχ. 3.12 έως 3.15 που ακολουθούν.

Στο Σχ. 3.12 απεικονίζονται οι κατανομές ωθήσεων για ενεργητική περιστροφή περί τη βάση του τοίχου. Όπως είναι αναμενόμενο, οι ωθήσεις κοντά στην κορυφή του τοίχου είναι ενεργητικές, ενώ κοντά στη βάση παρουσιάζονται αυξημένες, ίσες με τη γεωστατική τους τιμή. Η μορφή της κατανομής είναι παρόμοια για όλες τις συναρτήσεις σχήματος. Τη μεγαλύτερη ώθηση δίνει η γραμμική κατανομή (πιο συντηρητική εκτίμηση) και τη μικρότερη η παραβολική.

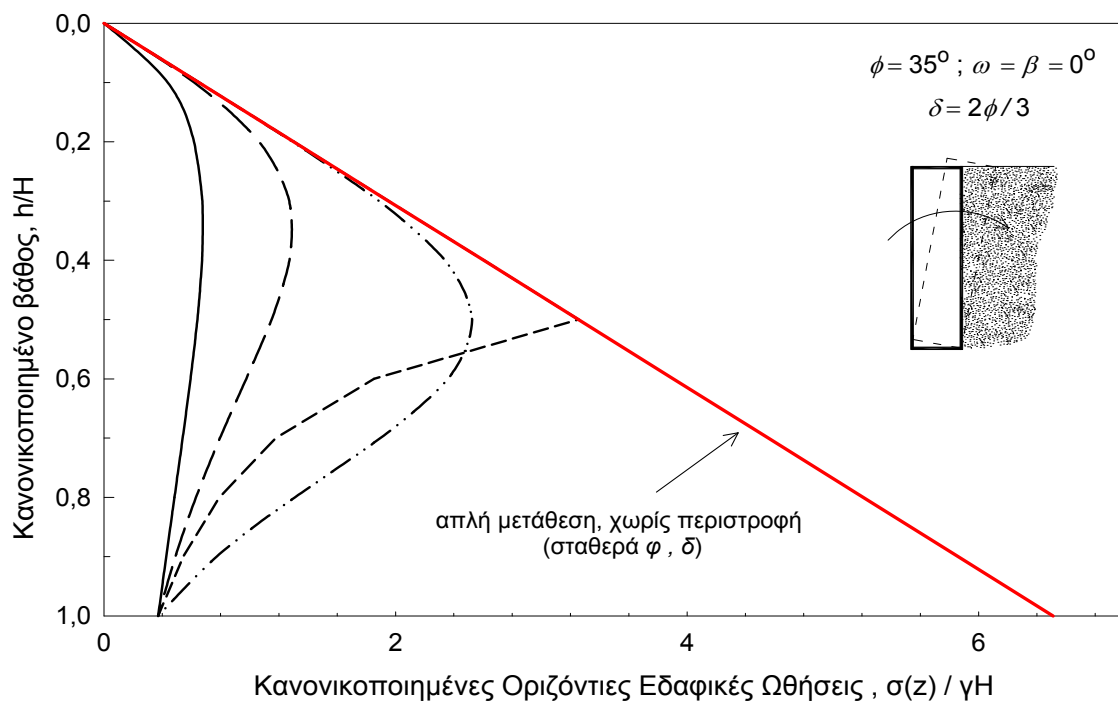
Στο Σχ. 3.13 απεικονίζονται οι αντίστοιχες κατανομές ωθήσεων για παθητική περιστροφή περί τη βάση του τοίχου. Και στην περίπτωση αυτή οι ωθήσεις πλησιάζουν τη γραμμή της παθητικής αστοχίας μόνο κοντά στην κορυφή του τοίχου, αλλά οι κατανομές τώρα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Ξανά πιο συντηρητική (μικρότερη παθητική ώθηση) προκύπτει από τη γραμμική συνάρτηση σχήματος.

Στα Σχ. 3.14 και 3.15 παρουσιάζονται ενεργητικές και παθητικές κατανομές ωθήσεων για περιστροφή του τοίχου περί την κορυφή. Στην περίπτωση αυτή οι τάσεις πλησιάζουν την τιμή της ενεργητικής ή της παθητικής αστοχίας μόνο στη βάση του τοίχου, ενώ ψηλότερα κινούνται στη γραμμή των γεωστατικών ωθήσεων.

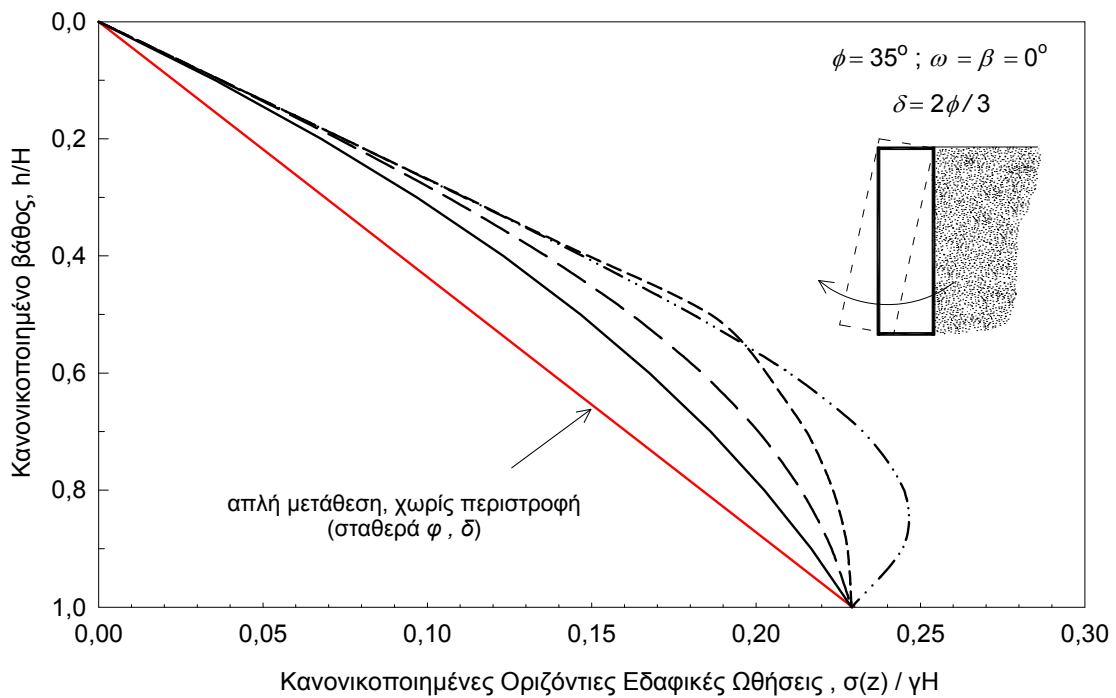
Από τις κατανομές που προκύπτουν φαίνεται ότι η κινηματική του τοίχου επηρεάζει σημαντικά τόσο το μέγεθος, όσο και το σημείο εφαρμογής της ώθησης. Η αξιοπιστία των συγκεκριμένων συναρτήσεων σχήματος για την περιγραφή της κινητοποιούμενης διατμητικής αντοχής του εδάφους, ελέγχεται μέσω συγκρίσεων με πειραματικές κατανομές που παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.



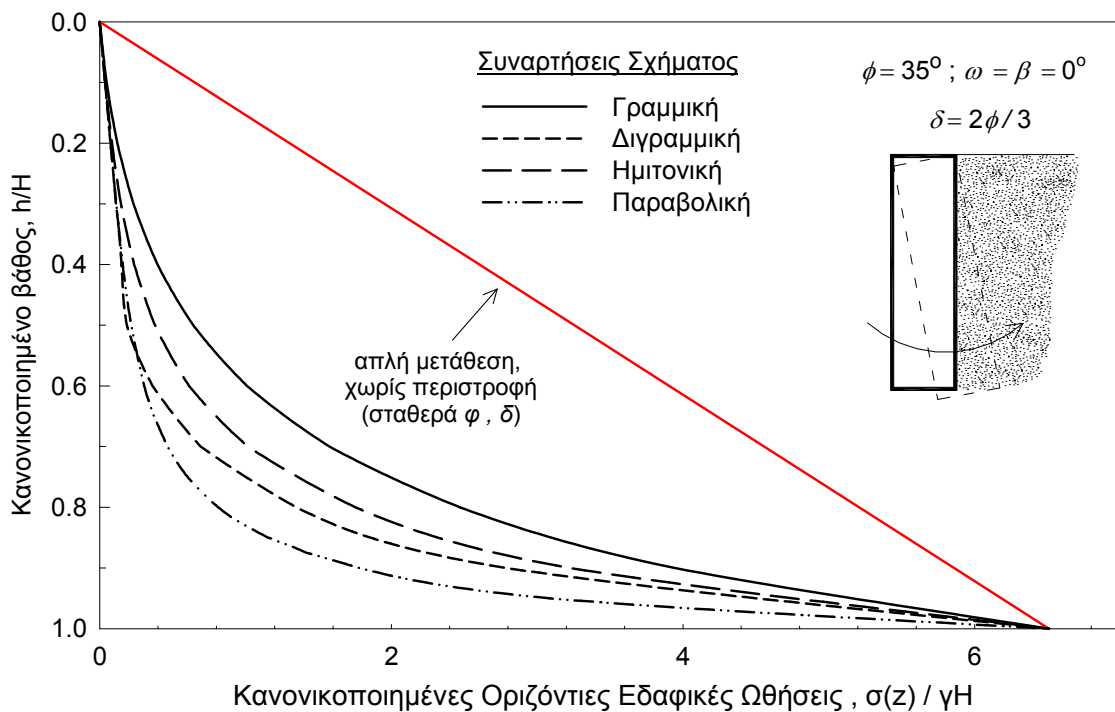
Σχήμα 3.12 Κατανομή ενεργητικών ωθήσεων για περιστροφή του τοίχου περί τη βάση



Σχήμα 3.13 Κατανομή παθητικών ωθήσεων για περιστροφή του τοίχου περί τη βάση



Σχήμα 3.14 Κατανομή ενεργητικών ωθήσεων για περιστροφή του τοίχου περί την κορυφή



Σχήμα 3.15 Κατανομή παθητικών ωθήσεων για περιστροφή του τοίχου περί την κορυφή

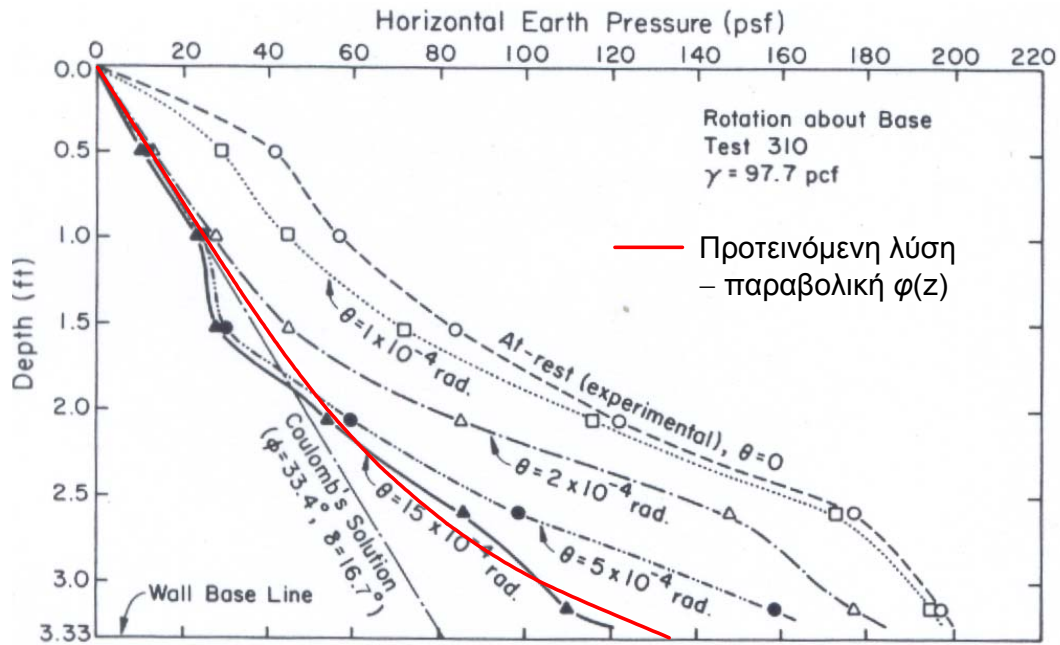
3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.4.1 Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για βαρυτικές κατανομές ωθήσεων

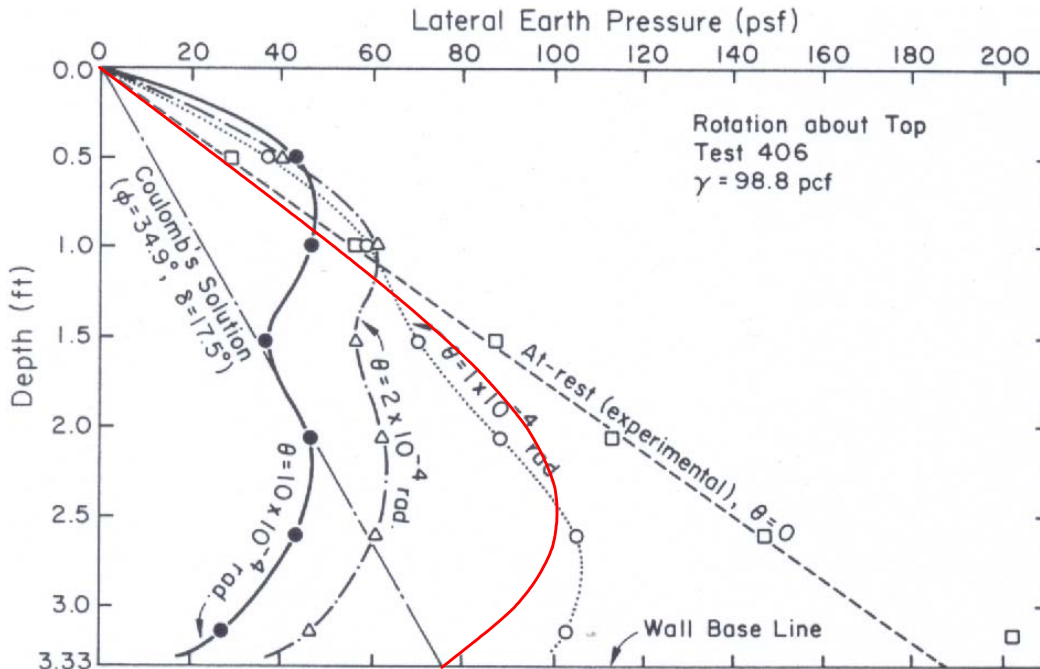
3.4.1.1 Αποτελέσματα για ενεργητική περιστροφή του τοίχου (Fang & Ishibashi, 1986)

Οι Fang & Ishibashi (1986) πραγματοποίησαν δοκιμές υπό βαρυτική φόρτιση στην ίδια πειραματική διάταξη την οποία χρησιμοποίησαν για σεισμικές ωθήσεις οι Sherif et al. (1982) στη σεισμική τράπεζα του πανεπιστημίου Washington. Σκοπός της πειραματικής διερεύνησης ήταν η επίδραση των κινηματικών συνθηκών στον τοίχο (περιστροφή περί την κορυφή, περιστροφή περί τη βάση). Στα αποτελέσματα των πειραμάτων, συμπεριλαμβάνονται και οι κατανομές των εδαφικών ωθήσεων καθ' ύψος του τοίχου. Οι παράμετροι των δοκιμών για την ενεργητική περιστροφή περί τη βάση είναι: $\gamma = 97.7$ pcf (15.3kPa), $\varphi = 33.4^\circ$, $\delta = 15.7^\circ$, $H = 1.2$ m. Τα αντίστοιχα για την περιστροφή περί την κορυφή είναι: $\gamma = 98.8$ pcf (15.5kPa), $\varphi = 34.9^\circ$, $\delta = 17.5^\circ$, $H = 1.2$ m

Τα αποτελέσματα των δοκιμών απεικονίζονται στα Σχ. 3.16 και 3.17 για την περιστροφή περί τη βάση και περί την κορυφή αντίστοιχα. Οι διάφορες πειραματικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετική τιμή της γωνίας περιστροφής θ (rad). Με κόκκινη γραμμή απεικονίζονται οι κατανομές των ωθήσεων που προκύπτουν από την προτεινόμενη μέθοδο οριακής ανάλυσης τάσεων για παραβολική συνάρτηση σχήματος. Στην περίπτωση περιστροφής περί τη βάση (Σχ. 3.16), η συμφωνία θεωρητικής και πειραματικής κατανομής είναι σχεδόν απόλυτη. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την υπόθεση της βαθμιαίας κινητοποίησης του μηχανισμού αστοχίας από την κορυφή προς τη βάση του τοίχου. Στην περίπτωση του Σχ. 3.17 (περιστροφή περί την κορυφή), η θεωρητική κατανομή ταιριάζει με την πειραματική μόνο για μικρές τιμές της περιστροφής θ (περίπου 10^{-4} rad). Για πιο μεγάλες τιμές, οι πειραματικές κατανομές παραμένουν σταθερές κοντά στην κορυφή του τοίχου, ελαφρά μεγαλύτερες από την κατάσταση K_0 , ενώ κοντά στη βάση του τοίχου μειώνονται έντονα και γίνονται αρκετά μικρότερες από τις ενεργητικές. Φυσιολογικά η οριακή ανάλυση τάσεων δεν μπορεί να παραβιάσει αυτό το όριο. Η μείωση των τάσεων κοντά στη βάση του τοίχου οφείλεται στο φαινόμενο της τοξωτής λειτουργίας του εδάφους, το οποίο σχετίζεται εγγενώς έντονα με την κινηματική του τοίχου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το έδαφος κοντά στην κορυφή του τοίχου αλληλεπιδρά με ορθές και διατμητικές δυνάμεις με την αμετακίνητη διεπιφάνεια, ενώ κοντά στη βάση η εδαφική μάζα συμπεριφέρεται ακριβώς όπως στο κλασικό πρόβλημα του σιλό.



Σχήμα 3.16 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την προτεινόμενη οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά για την κατανομή των ωθήσεων στην περίπτωση ενεργητικής περιστροφής περί τη βάση του τοίχου (τροποποιημένο από Fang & Ishibashi, 1986)



Σχήμα 3.17 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την προτεινόμενη οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά για την κατανομή των ωθήσεων στην περίπτωση ενεργητικής περιστροφής περί την κορυφή του τοίχου (τροποποιημένο από Fang & Ishibashi, 1986)

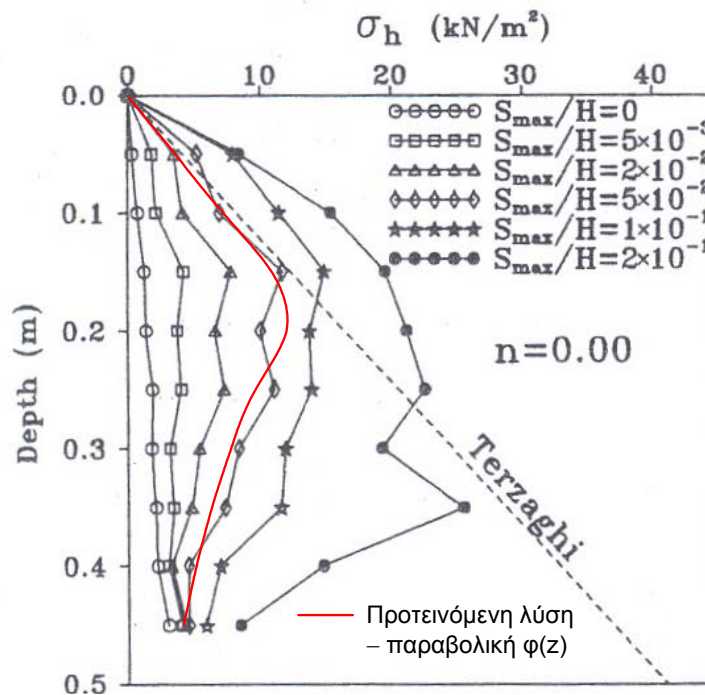
3.4.1.2 Αποτελέσματα για παθητική περιστροφή του τοίχου (Fang et al., 1994)

Η συγκεκριμένη πειραματική εργασία αποτελεί συνέχεια της εργασίας των Fang & Ishibashi (1986) και αποσκοπεί στη διερεύνηση της επίδρασης των κινηματικών συνθηκών στον τοίχο αντιστήριξης για παθητική περιστροφή περί την κορυφή ή τη βάση. Οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν σε πειραματική διάταξη, η οποία κατασκευάστηκε στο πανεπιστήμιο Chiao Tung της Taiwan. Οι παράμετροι των δοκιμών είναι: $\gamma = 15.5 \text{ kN/m}^3$, $\varphi = 30.9^\circ$, $\delta = 19.2^\circ$, $H = 0.5\text{m}$. Η μόνη αξιόλογη διαφορά με την προηγούμενη πειραματική διάταξη είναι το σημαντικά μικρότερο ύψος του τοίχου.

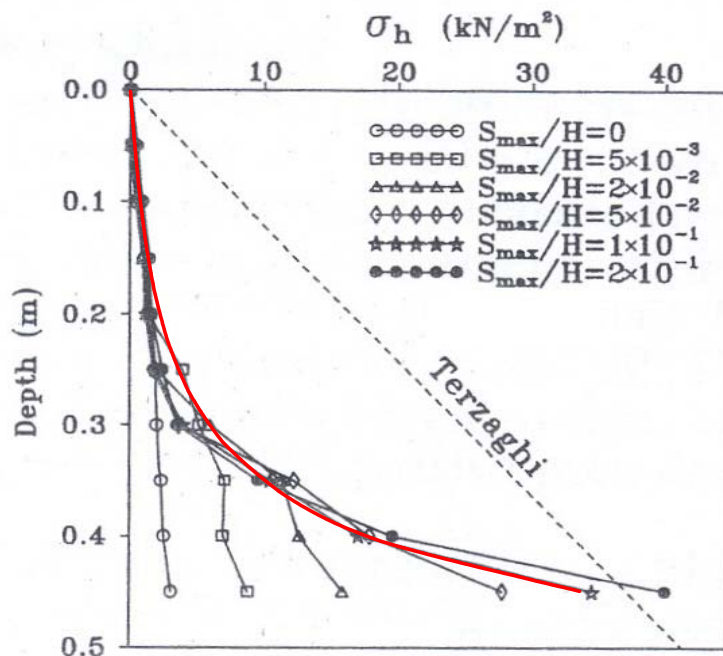
Στα Σχ. 3.18 και 3.19 παρουσιάζονται οι κατανομές των ωθήσεων για την περίπτωση περιστροφής περί τη βάση και την κορυφή αντίστοιχα. Για την πρώτη περίπτωση φαίνεται ότι μέχρι κάποιο επίπεδο παραμόρφωσης η ανάπτυξη των ωθήσεων ακολουθεί προοδευτικά τη γραμμή της παθητικής αστοχίας. Μέχρι το σημείο αυτό, η θεωρητική κατανομή αναπαράγει επιτυχώς την ανάπτυξη των παθητικών ωθήσεων. Για μετακίνηση μεγαλύτερη του $S_{\max}/H = 5 \times 10^{-2}$, οι τιμές των ωθήσεων κοντά στην κορυφή του τοίχου ξεπερνούν τη γραμμή των παθητικών ωθήσεων, ενώ κοντά στη βάση του τοίχου επίσης αυξάνουν και αρχίζουν να αποκλίνουν από την κατάσταση K_0 . Το πρώτο φαινόμενο σχετίζεται με την υπεραντοχή του επιχώματος την οποία προκαλεί η αναδιανομή των θλιπτικών και διατμητικών τάσεων λόγω του μηχανισμού τοξωτής λειτουργίας. Το δεύτερο οφείλεται απλώς στη μεγάλη μετακίνηση/στροφή του τοίχου, η οποία φυσιολογικά επηρεάζει την περιοχή κοντά στη βάση, απομακρύνοντας την από την κατάσταση K_0 . Επομένως, η προτεινόμενη μεθοδολογία δουλεύει ικανοποιητικά για ένα συγκεκριμένο επίπεδο παθητικής μετακίνησης.

Στην περίπτωση του Σχ. 3.19 (περιστροφή περί την κορυφή), παρατηρείται ότι η θεωρητική και η πειραματική κατανομή σχεδόν ταυτίζονται. Επιβεβαιώνεται με αυτόν τον τρόπο η υπόθεση συνθηκών K_0 σε μια μεγάλη ζώνη κοντά στην κορυφή του τοίχου και για τη συγκέντρωση της διατμητικής αστοχίας κοντά στο κινούμενο άκρο. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση η προτεινόμενη μέθοδος επιτυγχάνει να περιγράψει πολύ ικανοποιητικά την ανάπτυξη των συγκεκριμένων παθητικών ωθήσεων.

Συμπερασματικά, η απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου δεν είναι ικανοποιητική μόνο στην περίπτωση της ενεργητικής περιστροφής περί την κορυφή (πρόβλημα θυροφράγματος σιλό). Στην περίπτωση αυτή, ο μηχανισμός της τοξωτής λειτουργίας είναι πιο έντονος απ' ό,τι η παρούσα λύση μπορεί να περιγράψει. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις η μέθοδος φαίνεται να δουλεύει ικανοποιητικά.



Σχήμα 3.18 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά για την κατανομή των ωθήσεων στην περίπτωση παθητικής περιστροφής περί τη βάση (τροποποιημένο από Fang et al., 1994)



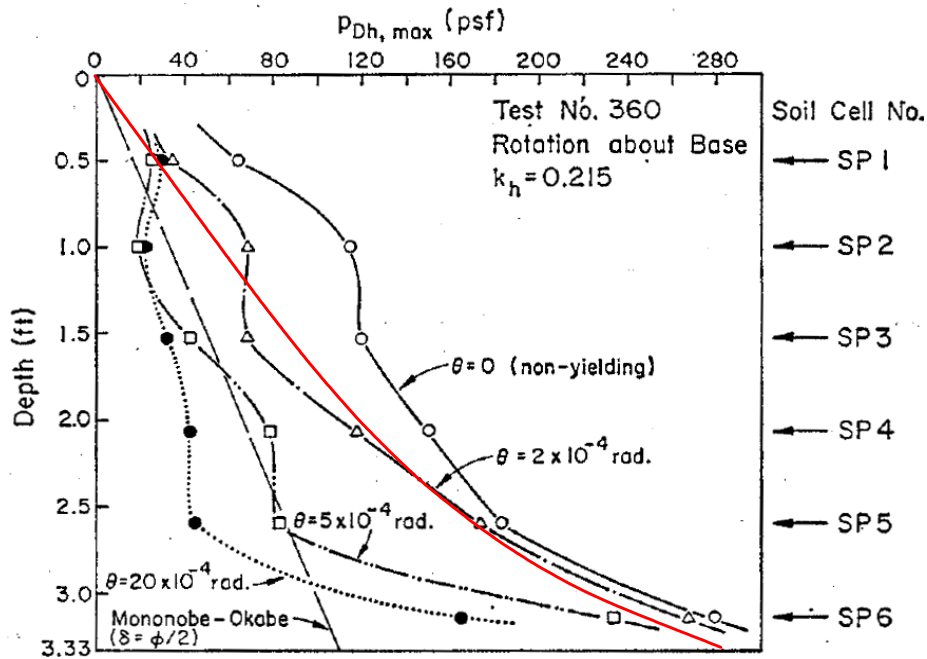
Σχήμα 3.19 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά, για την κατανομή των ωθήσεων στην περίπτωση παθητικής περιστροφής περί την κορυφή (τροποποιημένο από Fang et al., 1994)

3.4.2 Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για σεισμικές κατανομές ωθήσεων

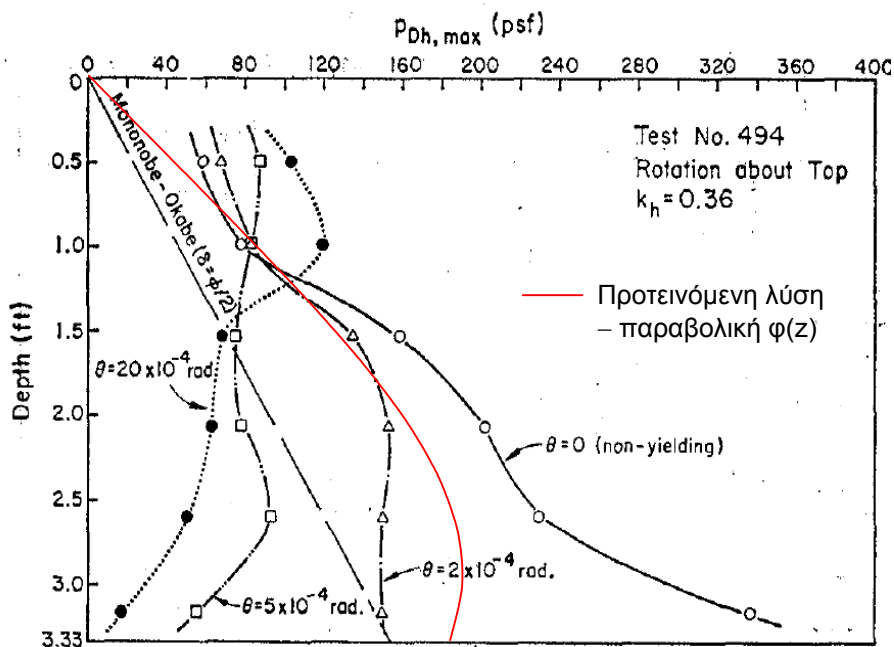
Σεισμικές δοκιμές για διάφορες κινηματικές συνθήκες του τοίχου πραγματοποίησαν πρώτοι οι Sherif, Ishibashi και Lee (1982) στη σεισμική τράπεζα του πανεπιστημίου Washington. Στην έρευνά τους χρησιμοποίησαν φυσικό προσομοίωμα άκαμπτου τοίχου ύψους 1.015m (1.200m συνολικά το επίχωμα). Οι ιδιότητες του εδάφους ήταν: γωνία τριβής $\varphi = 40.9^\circ$, ειδικό βάρος $\gamma = 16.3 \text{ kN/m}^3$, τραχύτητα διεπιφάνειας τοίχου εδάφους $\delta_w = 23.5^\circ$. Το συγκεκριμένο μοντέλο υποβλήθηκε σε αρμονικές ημιτονοειδείς φορτίσεις με συχνότητα διέγερσης 3.5 Hz, όπως προέκυψε από τις σχετικές σχέσεις ανακλιμάκωσης για δοκιμές 1-g και έναν συντελεστή επιτάχυνσης που κυμαινόταν από $k_h = 0.1$ σε 0.5. Οι μετρημένες ποσότητες ήταν η συνολική ώθηση στον τοίχο και το σημείο εφαρμογής της, ενώ δεν μετρήθηκαν κατανομές ωθήσεων.

Κατανομές ωθήσεων υπολόγισαν οι Ishibashi & Fang (1987) στην ίδια πειραματική διάταξη με την οποία μελέτησαν και τις βαρυτικές ωθήσεις (Fang & Ishibashi, 1986), η οποία είναι ουσιαστικά η διάταξη των Sherif et al. (1982) τροποποιημένη με την προσθήκη πρεσσιομέτρων. Οι παράμετροι των δοκιμών είναι: $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$, $\varphi = 40.1^\circ$, $\delta = \varphi/2$, $H = 1.015\text{m}$ (3.33ft). Τα δοκίμια υποβλήθηκαν σε αρμονική φόρτιση με συχνότητα 3.5Hz και διάφορες επιταχύνσεις. Στα Σχ. 3.20 και 3.21 παρουσιάζονται δύο κατανομές σεισμικών ωθήσεων, για περιστροφή περί τη βάση και περί την κορυφή και για σεισμικές επιταχύνσεις 0.215g και 0.36g αντίστοιχα. Επίσης για τον υπολογισμό της θεωρητικής κατανομής ελήφθη υπόψη, εκτός από την κινηματική, και η δυναμική απόκριση του επιχώματος (βλ. Ενότητα 3.2, για λόγο $\omega/\omega_l = 0.15$). Μια ερμηνεία των συγκεκριμένων αποτελεσμάτων έχει παρουσιαστεί πρόσφατα από τους Giarlelis & Mylonakis (2011).

Από τις συγκρίσεις των κατανομών φαίνεται ότι η κατανομή των σεισμικών ενεργητικών ωθήσεων εμφανίζει την ίδια περίπου συμπεριφορά με αυτή των αντίστοιχων βαρυτικών. Στην περίπτωση αυτή όμως παρατηρούνται μεγαλύτερες αποκλίσεις από την κατανομή που υπολογίζεται από την οριακή ανάλυση τάσεων. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στον ασφαλή χαρακτήρα της συγκεκριμένης λύσης (Βλ. Κεφάλαιο 2), με αποτέλεσμα τον υπολογισμό συστηματικά μεγαλύτερων τιμών για την ενεργητική ώθηση απ' ότι η λύση Monopobe – Okabe. Παρά το γεγονός ότι υπερεκτιμά τη σεισμική ώθηση, αποδεικνύεται για μια ακόμη φορά η καταλληλότητα της συγκεκριμένης μεθόδου να περιγράφει με ορθολογικό τρόπο την κατανομή των τάσεων, ιδιαίτερα για την περίπτωση της περιστροφής περί τη βάση του τοίχου.

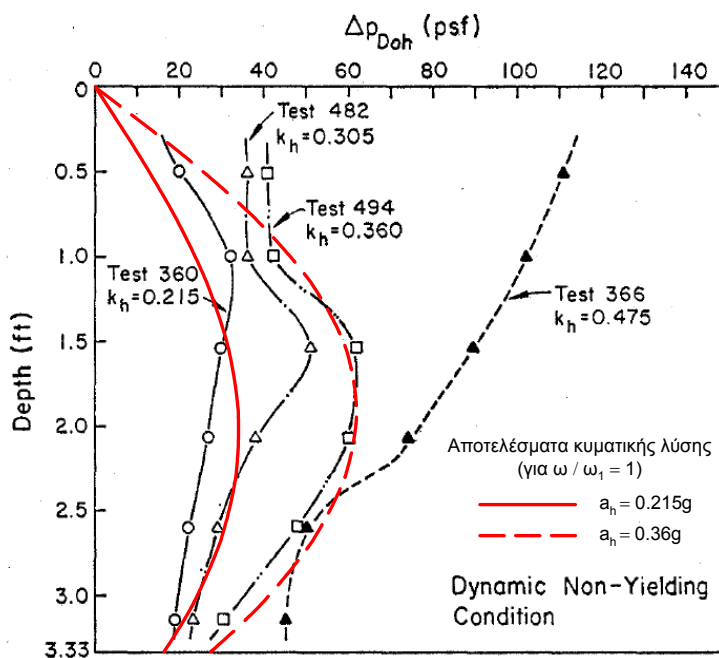


Σχήμα 3.20 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την προτεινόμενη οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά, για την κατανομή των ενεργητικών σεισμικών ωθήσεων στην περίπτωση περιστροφής περί τη βάση (τροποποιημένο από Ishibashi & Fang, 1987)



Σχήμα 3.21 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την προτεινόμενη οριακή ανάλυση τάσεων με αντίστοιχα πειραματικά, για την κατανομή των ενεργητικών σεισμικών ωθήσεων στην περίπτωση περιστροφής περί την κορυφή (τροποποιημένο από Ishibashi & Fang, 1987)

Στο Σχ. 3.22 απεικονίζεται η κατανομή του δυναμικού εύρους των σεισμικών ωθήσεων ($P_{Dh, max} - P_{Dh, min}$) οι οποίες μετρήθηκαν στον τοίχο για διάφορες επιταχύνσεις, χωρίς ο τοίχος να μπορεί να ολισθήσει ή να περιστραφεί (ελαστική περιοχή). Οι πειραματικές αυτές κατανομές χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της Εξ. (3.4), δηλαδή των προβλέψεων της προτεινόμενης κυματικής λύσης. Από τη στιγμή που δεν υπάρχει πλαστική διαρροή, στην Εξ. (3.4) χρησιμοποιείται η τιμή $\phi_0=28.36^\circ$, η οποία προκύπτει από την Εξ. (3.17) για την τιμή $\phi = 40.1^\circ$. Τα αποτελέσματα της τροποποιημένης εξίσωσης για τις περιπτώσεις $a_h = 0.215g$ και $a_h = 0.36g$ που απεικονίζονται στο διάγραμμα έχουν υπολογιστεί για τη συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στο συντονισμό ($\omega/\omega_1 = 1$, παρότι το πείραμα εκτελέστηκε για λόγο 0.15), και ταιριάζουν σε μέγεθος και μορφή με τις πειραματικές μετρήσεις.



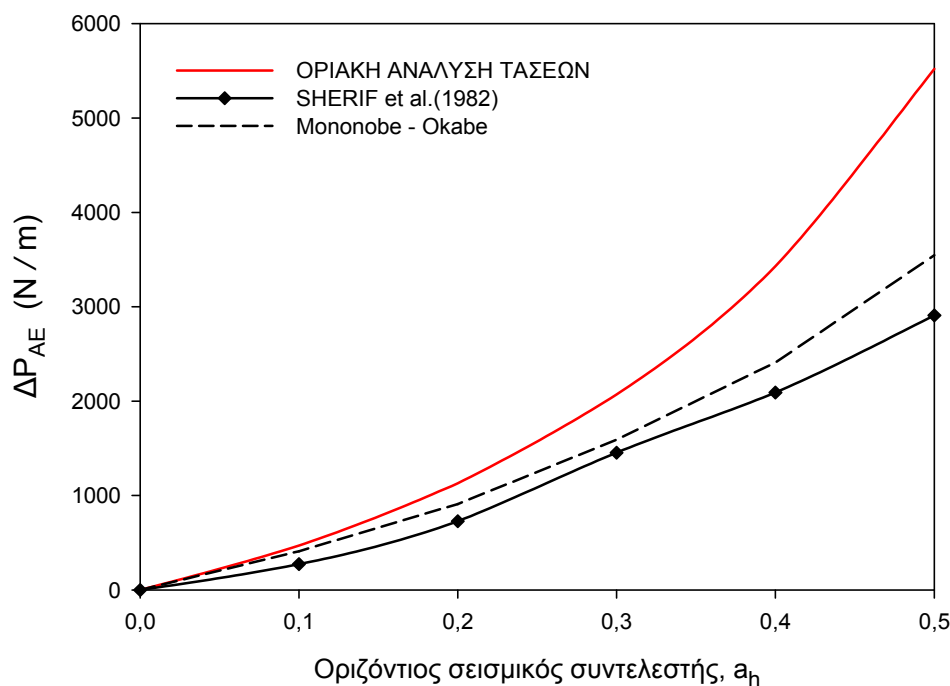
Σχήμα 3.22 Σύγκριση αποτελεσμάτων από την προτεινόμενη κυματική λύση με αντίστοιχα πειραματικά, για την κατανομή της δυναμικής διακύμανσης των ωθήσεων σε ανένδοτο τοίχο (τροποποιημένο από Ishibashi & Fang, 1987)

Από τις αριθμητικές συγκρίσεις που παρουσιάστηκαν προηγουμένως προκύπτει ότι η οριακή ανάλυση τάσεων υπερεκτιμά τις πειραματικές μετρήσεις. Από την άλλη μεριά, οι θεωρητικές κατανομές που παρουσιάστηκαν προβλέπουν γενικά χαμηλότερο σημείο εφαρμογής από ότι οι πειραματικές ($\sim H/3$ αντί του $H/2$). Με βάση τις δύο αυτές

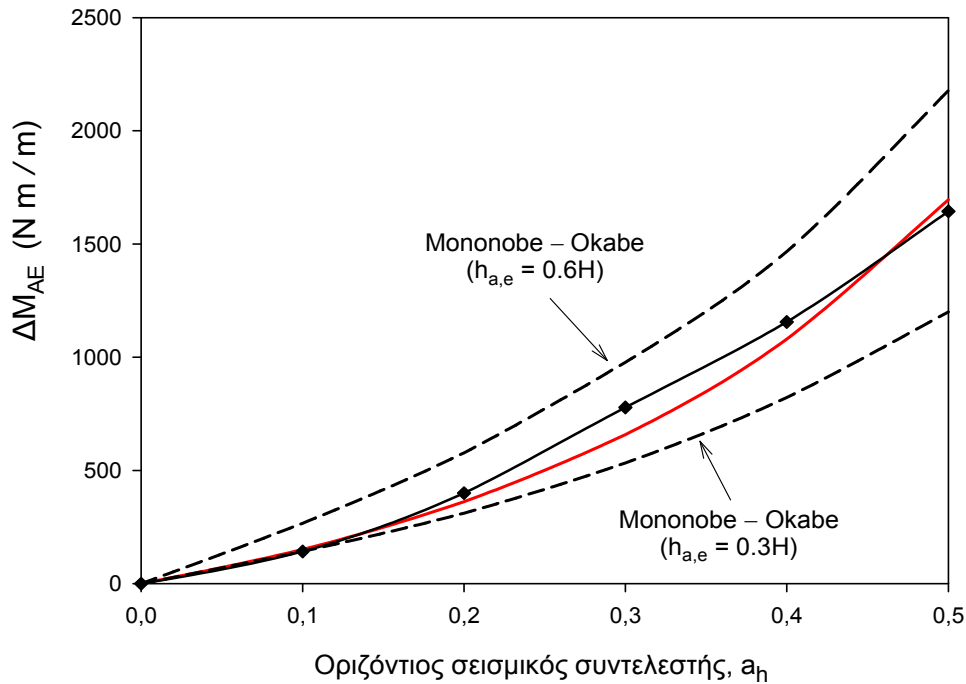
παρατηρήσεις αποκτά ενδιαφέρον η σύγκριση που παρουσιάζεται στα Σχ. 3.23 και 3.24, για τη σεισμική συνιστώσα της ώθησης ΔP_{AE} και την αντίστοιχη ροπή ΔM_{AE} . Για τον υπολογισμό των ωθήσεων έχει χρησιμοποιηθεί κατανομή για σε περιστροφή περί τη βάση.

Από το πρώτο σχήμα φαίνεται ότι η οριακή ανάλυση τάσεων υπερεκτιμά σημαντικά τη σεισμική ώθηση, συγκρινόμενη με τη μέθοδο Mononobe - Okabe, η οποία βρίσκεται πιο κοντά στην πειραματική καμπύλη των Sherif et al. (1982). Το περιθώριο ασφάλειας αυξάνει με την αύξηση του σεισμικού συντελεστή (για $a_h > 0.2$ η απόκλιση είναι ιδιαιτέρως αισθητή). Αντίθετα όμως με την ώθηση, τα αποτελέσματα της οριακής ανάλυσης βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα για την περίπτωση της σεισμικής ροπής, λόγω του χαμηλότερου σημείου εφαρμογής. Φαίνεται ότι η κινηματική του τοίχου με περιστροφή περί τη βάση επηρεάζει το μέγεθος της ώθησης αλλά ελάχιστα τη ροπή ανατροπής. Αυτό συμβαίνει διότι η ώθηση και το σημείο εφαρμογής μεταβάλλονται αντιστρόφως ανάλογα, με αποτέλεσμα το γινόμενο τους να παραμένει πρακτικώς αμετάβλητο.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου Mononobe - Okabe αποκλίνουν σημαντικά τόσο με βάση την υπόθεση ότι το σημείο εφαρμογής βρίσκεται στο $H/3$, όσο και με βάση την υπόθεση για $0.6H$ (Seed & Whitman, 1970).



Σχήμα 3.23 Σύγκριση αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της σεισμικής ώθησης ΔP_{AE} με την οριζόντια σεισμική επιτάχυνση (τροποπ. από τους Giarlelis & Mylonakis, 2011)



Σχήμα 3.24 Σύγκριση αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της σεισμικής ροπής ΔM_{AE} με την οριζόντια σεισμική επιτάχυνση (τροποποιημένο από τους Giarlelis & Mylonakis, 2011)

3.5 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάστηκαν επεκτάσεις της οριακής ανάλυσης τάσεων, οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό διαφορετικών κατανομών ωθήσεων από τη συνηθισμένη τριγωνική. Αυτές οι κατανομές λαμβάνουν υπόψη την κυματική φύση της σεισμικής διέγερσης στο επίχωμα και τις διαφορετικές κινηματικές συνθήκες που μπορούν να εφαρμοστούν στην αστοχία του τοίχου. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ανάλυσης μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

1) Η οριακή ανάλυση τάσεων ενδείκνυται για τον υπολογισμό κατανομών εδαφικών ωθήσεων, καθώς παρέχει απευθείας τις τάσεις σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου. Επομένως μπορεί εύκολα να ενσωματώσει μεταβλητές παραμέτρους με τη μορφή των συναρτήσεων σχήματος που εξετάστηκαν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Αυτό δεν είναι δυνατό μέσω των λύσεων της κινηματικής οριακής ανάλυσης.

2) Η προτεινόμενη κυματική λύση, είναι απλούστερη από την αντίστοιχη τεχνική των Steedman & Zeng (1990) και επιπλέον είναι θεωρητικώς αποδεκτή στο πλαίσιο της πλαστικής οριακής ανάλυσης (το έδαφος βρίσκεται σε κατάσταση επικείμενης διαρροής) και αλγεβρικώς ορθή, αφού ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του επιχώματος.

3) Με χρήση κυματικών λύσεων για τη δυναμική απόκριση του επιχώματος, παρουσιάζονται μη-τριγωνικές κατανομές ωθήσεων με βάση τις οποίες το σημείο εφαρμογής της σεισμικής συνιστώσας ανέρχεται άνω του 50% του ύψους του τοίχου στο συντονισμό. Με βάση τις συνηθισμένες συχνότητες των πραγματικών σεισμικών κινήσεων, η επίδραση της δυναμικής απόκρισης αναμένεται να είναι σημαντική συνήθως για τοίχους ψηλότερους από 5m.

4) Η εφαρμογή της τεχνικής της Dubrova στην οριακή ανάλυση τάσεων μπορεί να αποτελέσει ένα απλό και αξιόπιστο εργαλείο για τον υπολογισμό κατανομών ωθήσεων σε τοίχους αντιστήριξης οι οποίοι μετατοπίζονται στρεφόμενοι περί την κορυφή ή τη βάση, με χρήση απλών συναρτήσεων σχήματος για τις παραμέτρους φ και δ_w . Σημαντικό πλεονέκτημα της προτεινόμενης οριακής ανάλυσης τάσεων αποτελεί η συμμετρία της, καθώς μόνο η αλγεβρική έκφραση της λύσης σε συνδυασμό με μια συνεχή συνάρτηση σχήματος, μπορεί να περιγράψει τόσο την ενεργητική όσο και την παθητική κατάσταση καθώς και οποιαδήποτε μετάβαση από τη μία κατάσταση στην άλλη.

6) Οι συναρτήσεις σχήματος για τα φ και δ_w στην παθητική κατάσταση είναι διαφορετικές από ότι στην ενεργητική, κάτι που δεν επισημαίνεται στις κλασικές εφαρμογές της ανάλυσης κατά Dubrova (Chang, 1981; Chen & Liu, 1990).

7) Η παραδοχή της προοδευτικής αστοχίας της Dubrova ισχύει με ικανοποιητική προσέγγιση για περιστροφή γύρω από τη βάση, αλλά όχι για περιστροφή περί την κορυφή. Στη δεύτερη περίπτωση η όποια είναι παρόμοια με το πρόβλημα θυροφράγματος σε σιλό, εμφανίζεται πολύ έντονα το φαινόμενο της τοξωτής λειτουργίας του εδάφους, το οποίο η συγκεκριμένη τεχνική δεν μπορεί να προσομοιώσει ικανοποιητικά. Τα αποτελέσματα, για όλες τις συναρτήσεις σχήματος $\varphi(z)$, βρίσκονται σε καλή συμφωνία με διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα, τόσο για βαρυντική όσο και για σεισμική φόρτιση.

9) Από τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτει ότι η ροπή ανατροπής, η οποία αποτελεί το βασικότερο μέγεθος σχεδιασμού τοίχων αντιστήριξης, επηρεάζεται σε πολύ μικρό βαθμό από τις διάφορες κινηματικές συνθήκες, καθώς αυτές επηρεάζουν αντιστρόφως ανάλογα το μέγεθος της ώθησης και το σημείο εφαρμογής της, με αποτέλεσμα το γινόμενο να παραμένει ουσιαστικά αμετάβλητο. Για παράδειγμα στην περιστροφή περί τη βάση του τοίχου αυξάνεται η ώθηση αλλά το σημείο εφαρμογής μειώνεται, ενώ στην περιστροφή περί την κορυφή παρατηρείται το αντίθετο. Αντίθετα με τη ροπή ανατροπής, η ώθηση αυτή καθεαυτή μεταβάλλεται σημαντικά με τις αλλαγές των κινηματικών συνθηκών. Αυτό φυσιολογικά επηρεάζει τον έλεγχο σε ολίσθηση.

4. ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΠΙΔΙΟΥ ΤΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΙΔΙΟΝ ΒΑΡΟΣ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΛΑΦΙΚΩΝ ΩΘΗΣΕΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η οριακή ανάλυση τάσεων σε εδαφικό μέσο στο οποίο ενεργούν δυνάμεις πεδίου (ίδιον βάρος και αδρανειακές δυνάμεις) και οι οποίες οδηγούν σε πλαστικοποίηση σε όλα τα σημεία του μέσου, αποτελεί ένα από τα κλασικότερα και πλέον δυσεπίλυτα προβλήματα της γεωτεχνικής μηχανικής. Παρότι το πρόβλημα βρίσκεται στο επίκεντρο του επιστημονικού ενδιαφέροντος για πάνω από τρεις αιώνες, κατά τη διάρκεια των οποίων η σχετική θεωρία εξελίχθηκε σημαντικά, το πρόβλημα του «συντελεστή – N_γ » όπως είναι αλλιώς γνωστό στη βιβλιογραφία, παραμένει ακόμα άλυτο σε κλειστή μαθηματική μορφή. Επίσης άλυτο παραμένει το συγγενικό πρόβλημα του προσδιορισμού των ωθήσεων γαιών, δηλαδή των συντελεστών K_A και K_P , στο οποίο επικεντρώνεται η παρούσα εργασία. Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται αρχικά μια εκτενής αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της θεωρίας με έμφαση στις επιστημονικές εργασίες που αποτέλεσαν ορόσημα στην εξέλιξη αυτή, όπως αυτές του Coulomb (1776), Rankine (1857), Levy (1873), Boussinesq (1876) Kötter (1903), von Karman (1927), Caquot (1934) και Nadai (1963). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση του προβλήματος, η οποία εισάγει μια σημαντική απλοποίηση, μέσω της μετατροπής του σε μια μη-γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες, η οποία επιτρέπει την επίλυση του προβλήματος με σχετικά απλές αριθμητικές και ημιαναλυτικές τεχνικές.

4.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

4.2.1 Η θεμελίωση του προβλήματος από τον Coulomb (1776)

Η πρώτη καταλυτική συμβολή του Coulomb είναι ο ορισμός της έννοιας της διατμητικής αντοχής (μέγιστης διατμητικής αντίστασης) του εδάφους, υπολογισμένη πάνω σε ένα επίπεδο που ολισθαίνει, ως άθροισμα δύο συνιστωσών, της «εσωτερικής τριβής»

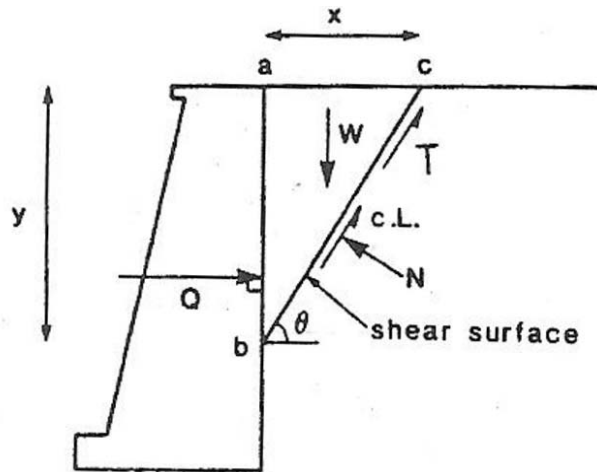
και της «συνοχής». Ο Coulomb κατανοεί ότι αυτές δεν είναι φυσικές δυνάμεις, αλλά είναι αντιδράσεις που παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους τη στιγμή της αστοχίας, οδηγώντας έτσι στην έννοια της οριακής κατάστασης ισορροπίας. Γνωρίζει επίσης τις ιδιότητες της τριβής (αναλογία της ασκούμενης δύναμης – ανεξάρτητη της επιφάνειας) όπως αυτή είχε οριστεί από τον Amontons (1702) και τις ιδιότητες της συνοχής (αναλογία της επιφάνειας – ανεξάρτητη της δύναμης) όπως είχε προσδιοριστεί από προηγούμενα πειράματα όπως του Musschenbroek, (1739). Τεκμηριώνει και επεκτείνει τη σχετική θεωρία με τη βοήθεια μεγάλου αριθμού συστηματικών πειραμάτων που σχεδίασε και εκτέλεσε ο ίδιος. Πολύ μπροστά από την εποχή του, παρατηρεί ότι η συνοχή στο εδαφος δεν είναι πραγματική και τη θεωρεί μηδενική σε όλα τα διαταραγμένα εδάφη.

Η ανάλυση του Coulomb γίνεται με όρους ολικών τάσεων, ωστόσο κάνει συγκεκριμένη αναφορά στην επίδραση του νερού και συγκεκριμένα στις υδραυλικές πιέσεις του νερού των πόρων και στη μεταβολή των φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων του εδάφους (αύξηση βάρους, μείωση διατμητικής αντίστασης, διόγκωση). Αγνοώντας την αρχή της ενεργούς τάσης, η οποία δεν είχε ακόμα διατυπωθεί, τόνισε ότι για να είναι αξιόπιστες οι διαστάσεις που προσδιορίζονται από τις εξισώσεις, «το νερό δεν πρέπει να εισχωρεί στα εδάφη των οποίων αναζητούνται οι δυνάμεις, ή, εάν εισχωρεί, πρέπει να αυξάνει τον όγκο μόνο ελάχιστα» και επισημαίνει θέματα αποτελεσματικής στράγγισης.

Η δεύτερη καινοτομία του Coulomb είναι η εφαρμογή του λογισμού των μεταβολών για τη βελτιστοποίηση του κρίσιμου μηχανισμού αστοχίας, θέτωντας τα θεμέλια της μεθόδου της οριακής ισορροπίας. Ο Coulomb έφτασε μόλις ένα βήμα μακριά από το να ολοκληρώσει τον επιστημονικό του θρίαμβο με την ανάπτυξη μιας γενικευμένης θεωρίας ισορροπίας με όρους τάσεων, πολύ πριν τον ορισμό του αντίστοιχου τανυστή από τον Cauchy, (1826), καθώς προχώρησε στη διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου και την εξέταση της στατικής ισορροπίας του πρίσματος.

Σχηματικά η μέθοδος του Coulomb παρουσιάζεται στο Σχ. 4.1. Αρχικά λαμβάνεται ένα τριγωνικό πρίσμα abc τυχαίας γεωμετρίας πάνω στο οποίο σχεδιάζονται όλες οι ασκούμενες δυνάμεις: το βάρος W , η ώθηση του τοίχου Q , η κάθετη αντίδραση στο κεκλιμένο επίπεδο N και η διατμητική αντίσταση του επιπέδου που είναι το άθροισμα $T + cL$ (τριβής και συνοχής). Αν όλες οι δυνάμεις αναλυθούν πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο bc και ληφθεί η ισορροπία των δυνάμεων, τότε υπολογίζονται δύο ακραίες τιμές της ώθησης Q , για τις οποίες το πρίσμα κινείται είτε προς τα κάτω (ενεργητική κατάσταση), είτε προς τα πάνω (παθητική κατάσταση), οι οποίες προκύπτουν από την Εξ. (4.1) για το πάνω και

κάτω πρόσημο αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη εξίσωση με n^{-1} συμβολίζεται ο συντελεστής τριβής του επιπέδου, ενώ χρησιμοποιείται το Πυθαγόρειο θεώρημα για τον υπολογισμό των μηκών.



Σχήμα 4.1 Ανάλυση κατά Coulomb (από Clayton et al., 2003)

Ο λόγος που ο ίδιος ο Coulomb δεν χρησιμοποίησε γωνίες και τριγωνομετρικές συναρτήσεις ώστε να απλοποιήσει τις εξισώσεις, μπορεί να αποδοθεί στην εξής καθαρή συγκυρία: Όπως φαίνεται από τον πρόλογό του, ο ίδιος επιθυμούσε να δώσει περισσότερο πρακτικό και λιγότερο θεωρητικό χαρακτήρα στην εργασία του. Για αυτό και συμπεριέλαβε αυτούσιες τις λύσεις που είχε εξάγει αρκετά χρόνια πριν, για προσωπική του χρήση για υπολογισμούς μηχανικού στο πεδίο. Είναι προφανές ότι για εκείνη την εποχή, ο υπολογισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν ήταν κάτι απλό και τετριμμένο όπως σήμερα, και ήταν σαφώς προτιμότερη η χρήση ευκλείδειας γεωμετρίας και στοιχειωδών αριθμητικών πράξεων. Αν αντικαταστήσουμε με τριγωνομετρικές συναρτήσεις (Clayton et al., 2003) για τη γωνία τριβής ϕ και τη γεωμετρική γωνία θ ($n^{-1} = \tan\phi$ και $y/x = \tan\theta$), τότε η Εξ. (4.1α) που εξάγει ο Coulomb παίρνει τη γνωστή μορφή της Εξ. 4.1β

$$Q_p^a = \frac{[W(y \mp xn^{-1}) \mp c(y^2 + x^2)]}{x \pm yn^{-1}} \tag{4.1α}$$

$$Q_p^a = \frac{W[\tan\theta \mp \tan\phi] \mp cL/\cos\theta}{[1 \pm \tan\theta \tan\phi]} \tag{4.1β}$$

Η τιμή της ώθησης, όπως εκφράζεται από τις παραπάνω εξισώσεις, είναι συνάρτηση του τυχαίου μήκους x (κατά την αυθεντική ανάλυση του Coulomb) ή της τυχαίας γωνίας θ (κατά την τροποποιημένη ανάλυση) του πρίσματος. Η κρίσιμη τιμή της ώθησης υπολογίστηκε με τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, από την οποία προκύπτει

$$x = -yn^{-1} + y(1+n^{-2})^{1/2} \quad (4.2)$$

Καταλήγοντας στην παραπάνω εξίσωση ο Coulomb απέδειξε ότι η κλίση της κρίσιμης επιφάνειας αστοχίας είναι ανεξάρτητη από τη συνοχή και εξαρτάται μόνο από την τριβή. Επιπλέον, όταν η τριβή είναι μηδέν η κλίση αυτή θα είναι 45° . Αυτό είναι ακόμα πιο εμφανές αν κανείς χρησιμοποιήσει τριγωνομετρικές εξισώσεις, οπότε προκύπτει το απλούστερο και γνωστό αποτέλεσμα (Clayton et al., 2003)

$$\tan \theta_{crit} = \frac{y}{x} = \frac{1}{(\sec \phi \mp \tan \phi)} = \frac{\cos \phi}{(1 \mp \sin \phi)} = \tan(45^\circ \pm \frac{\phi}{2}) \quad (4.3)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (4.2) την τιμή της κρίσιμης κλίσης, ο Coulomb κατάληξε σε μια σχέση της μορφής $Q = my^2 \mp lcy$ όπου m, l είναι συναρτήσεις μόνο της τριβής n και παίρνουν την τιμή 1 για $\phi = 0$. Σε αυτήν την έκφραση ο Coulomb συμπυκνώνει όλες του τις παρατηρήσεις και συμπεράσματα σχετικά με τη διατμητική αντίσταση του εδάφους. Συγκεκριμένα εξηγεί ότι η τριβή, μέσω του συντελεστή m δίνει μικρότερη ενεργητική και μεγαλύτερη παθητική ώθηση από την αντίστοιχη υδροστατική πίεση που είναι ανάλογη του y^2 . Η ώθηση αυτή μειώνεται ή αυξάνεται περαιτέρω αντίστοιχα λόγω της συνοχής. Αν στην Εξ. (4.1β) με τις τριγωνομετρικές εξισώσεις αντικατασταθούν οι τιμές του βάρους $W = \frac{1}{2} \gamma y^2 \cot \theta$ και του μήκους $L = y/\sin \theta$, λαμβάνεται με κατάλληλες απλοποιήσεις με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων (Clayton et al., 2003) η έκφραση στην οποία κατέληξαν πολύ αργότερα οι Francais (1820) και Bell (1915)

$$Q_{\min}^{\max} = \frac{1}{2} \gamma y^2 \tan^2(45^\circ \mp \frac{\phi}{2}) \mp 2cy \tan(45^\circ \mp \frac{\phi}{2}) = \frac{1}{2} \gamma y^2 K_{a,p} \mp 2cy \sqrt{K_{a,p}} \quad (4.4)$$

Επίσης, ο Coulomb παραθέτει μια σειρά από λυμένα παραδείγματα που περιλαμβάνουν την προσθήκη επιφόρτισης στο επίχωμα και τραχύτητας στον τοίχο, για την οποία ανακάλυψε ότι αλλάζει η κρίσιμη κλίση του μηχανισμού αστοχίας. Ανακάλυψε με αυτόν τον τρόπο τη σημασία που έχει η δεύτερη συνοριακή συνθήκη, που είναι ανεξάρτητη του επιχώματος, κάτι που ξανασυναντάμε μετά από πολλά χρόνια στις εργασίες των Levy (1873) και Boussinesq (1876). Τέλος, ο Coulomb προσπάθησε να υπολογίσει αναλυτικά το πραγματικό, (καμπύλο) σχήμα της επιφάνειας αστοχίας. Αναγνωρίζοντας τη μαθηματική δυσκολία αυτού του εγχειρήματος, πρότεινε τη χρήση της ευθύγραμμης επιφάνειας ολίσθησης, η οποία προσομοιώνει πολύ καλά την ενεργητική αστοχία.

Με βάση όσα προαναφέρθηκαν, γίνεται αντιληπτό ότι είναι λανθασμένη η εντύπωση που αφήνεται σε όλους τους αναγνώστες των σύγχρονων εγχειριδίων Εδαφομηχανικής, ότι η συνεισφορά του Coulomb στο συγκεκριμένο επιστημονικό αντικείμενο, εκτός από τον ορισμό της διατμητικής αντοχής του εδάφους (κριτήριο Mohr - Coulomb), είναι ένας μαθηματικός τύπος για τον υπολογισμό των εδαφικών ωθήσεων. Για την ακρίβεια ο Coulomb δεν εξήγαγε κανέναν από τους γνωστούς κλειστούς τύπους που γνωρίζουμε σήμερα ως εξισώσεις «Coulomb», αλλά μια ολόκληρη μεθοδολογία ανάλυσης, τη Μέθοδο της Οριακής Ισορροπίας, που έμελε να γίνει ένα βασικό – αν όχι το κύριο – εργαλείο των μηχανικών μέχρι τις μέρες μας για την ανάλυση προβλημάτων ευστάθειας και φέρουσας ικανότητας. Οι εξισώσεις «Coulomb» που χρησιμοποιούμε σήμερα προέρχονται από μεταγενέστερους ερευνητές οι οποίοι εφάρμοσαν τη μέθοδο του Coulomb σε πιο γενικευμένα προβλήματα και διατύπωσαν λύσεις σε απλές, κλειστές μαθηματικές εκφράσεις.

4.2.2 Οι πρωτοπόροι της οριακής ανάλυσης τάσεων: Rankine (1857), Levy (1873) και Boussinesq (1876)

Αρκετά χρόνια αφού η μέθοδος του Coulomb βρισκόταν σε ευρεία χρήση έχοντας δώσει ικανοποιητικές λύσεις σε πολλά πρακτικά προβλήματα, μια νέα τάση εμφανίζεται στο συγκεκριμένο πεδίο με την εργασία του Rankine (1857). Κύριο γνώρισμα της η προσπάθεια εξεύρεσης αναλυτικών λύσεων οι οποίες να βασίζονται σε αυστηρή μαθηματική ανάλυση της κατάστασης οριακής ισορροπίας, χωρίς τη χρήση αυθαίρετων μηχανισμών αστοχίας. Για να φτάσει σε αυτό το σημείο η επιστημονική σκέψη, είχε προηγηθεί λίγα χρόνια πριν η ανάπτυξη της θεωρίας του τανυστή των τάσεων και της

ελαστικότητας από τον Cauchy (1826) και μετέπειτα από τον Lamé (1852). Ο Rankine χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του τανυστικού μετασχηματισμού των τάσεων του Cauchy, το θεώρημα των «συζυγών επιπέδων και τάσεων» από την ελαστικότητα και τις διαφορικές εξισώσεις της ισορροπίας των τάσεων (4.5α) και (4.5β), επιλύει πλήρως αναλυτικά το πρόβλημα της οριακής ισορροπίας ενός απειρομήκους πρηνούς από μη συνεκτικό έδαφος, καταλήγοντας στην Εξ. (2.54) που έχει ήδη παρουσιαστεί.

Στα σύγχρονα εγχειρίδια της Εδαφομηχανικής η λύση του Rankine φαίνεται να προκύπτει εύκολα με στοιχειώδη γεωμετρία, από τη γραφική απεικόνιση του τανυστή με τη βοήθεια των κύκλων Mohr. Ωστόσο, αυτή η τεχνική μαζί με την ιδιότητα του πόλου, που χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα εργασία στο Κεφάλαιο 2, έγινε γνωστή λίγα χρόνια αργότερα (Culmann, 1866; Mohr, 1882). Την εποχή που ο Rankine δημοσίευσε την εργασία του, ο μόνος τρόπος γραφικής απεικόνισης ήταν το ελλειψοειδές των τάσεων του Lamé, που δεν προσφέρει την ίδια ευκολία για γραφικούς υπολογισμούς. Κύκλους Mohr χρησιμοποίησαν αργότερα οι Bell (1915) και Fitzgerald (1915), οι οποίοι επέκτειναν τη λύση του Rankine για έδαφος με τριβή και συνοχή καταλήγοντας στη γνωστή εξίσωση $q_a = K_a p - 2c\sqrt{K_a}$ και επίσης στο συμπέρασμα ότι η συνοχή δεν επηρεάζει τον προσανατολισμό των επιπέδων αστοχίας, όπως είχε αποδείξει ο ίδιος ο Coulomb ενάμιση αιώνα νωρίτερα.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.5\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (4.5\beta)$$

Το 1867, ο Levy παρουσίασε στη Γαλλική Ακαδημία μια παρόμοια ανάλυση, πλήρως ανεξάρτητη από αυτή του Rankine. Η εργασία αυτή σχολιάστηκε από τον Saint-Venant (1870) και στη συνέχεια εκδόθηκε στην τελική της μορφή το 1873. Σε αυτή την τελική έκδοση γίνεται αναφορά σε υποσημείωση στην εργασία του Rankine, την οποία αρχικά ο Levy αγνοούσε. Ο Levy προχωρώντας πιο πέρα από τον Rankine, διαπιστώνει ότι η στατική επίλυση του επιχώματος που αντιστοιχεί σε πρόβλημα ευθύγραμμων χαρακτηριστικών ανταποκρίνεται μόνο κατά τυχαίο τρόπο στους πραγματικούς τοίχους αντιστήριξης, καθώς η τραχύτητα της διεπιφάνειας τοίχου εδάφους, δ (φ_l στα κείμενα των μελετητών της εποχής), αποτελεί δεσμευτική συνοριακή συνθήκη (βλ Κεφάλαιο 2). Με

βάση αυτήν την παρατήρηση, καταλήγει στο να διατυπώσει την πρώτη συνθήκη «γενικευμένου πεδίου Rankine» και συγκεκριμένα υπολογίζει την κλίση που πρέπει να έχει ο τοίχος, συναρτήσει των άλλων παραμέτρων (γωνίες τριβής φ και φ_1 , κλίση πρανούς β) ώστε να παραμένουν ευθύγραμμα τα κύρια επίπεδα και ακολούθως οι επιφάνειες ολίσθησης. Μάλιστα προτείνει να κατασκευάζονται οι τοίχοι με τη συγκεκριμένη κλίση ώστε να ισχύουν οι θεωρητικές λύσεις.

Η δεύτερη καινοτομία που εισάγει ο Levy, την οποία θα εξετάσουμε αναλυτικά στη συνέχεια, είναι η χρήση μιας άγνωστης συνάρτησης δυναμικού Φ (Airy, 1862) η οποία να ικανοποιεί ταυτοτικά τις εξισώσεις ισορροπίας (4.5α,β)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y - \gamma y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy} \quad (4.6\alpha, \beta, \gamma)$$

Αν οι παραπάνω εξισώσεις εισαχθούν στο κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb (Εξ. 4.7 για υλικό χωρίς συνοχή) προκύπτει η έκφραση του κριτηρίου αστοχίας ως προς την άγνωστη συνάρτηση δυναμικού. Πρόκειται για μη-γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, δεύτερου βαθμού και δεύτερης τάξης, για την οποία ο Saint-Venant σχολίασε ότι «δεν μπορεί κάποιος να ελπίζει ποτέ σε κάποια γενική ακριβή λύση»

$$4\tau_{xy}^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_x + \sigma_y)^2 \quad (4.7)$$

Ακριβή (πλην όμως ειδική) λύση της εξίσωσης αποτελεί βέβαια η λύση του προβλήματος των ευθύγραμμων χαρακτηριστικών. Στην περίπτωση κεκλιμένου πρανούς υπό γωνία β , ισχύουν οι λύσεις (Rankine, 1857; Levy, 1873; Saint-Venant, 1870):

$$\sigma_x = \gamma p \lambda^2 \cos \beta, \quad \sigma_y = \gamma p \left(\frac{1 + \lambda^2 \sin^2 \beta}{\cos \beta} \right), \quad \tau_{xy} = -\gamma p \lambda^2 \sin \beta \quad (4.8)$$

όπου

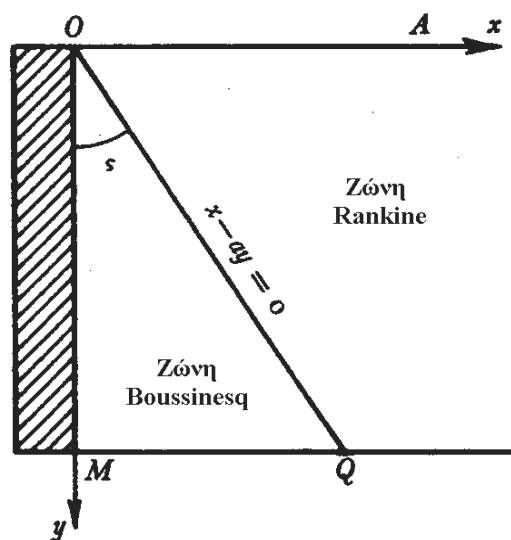
$$p = y \cos \beta + x \sin \beta, \quad \lambda = \frac{\cos \beta}{\cos \varphi} - \left(\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Σημειώνεται ότι ο λόγος τ/σ_x (κλίση της τάσης σε οποιοδήποτε κατακόρυφο επίπεδο) ισούται, σε απόλυτη τιμή, με $\tan \beta$ σε όλα τα σημεία του μέσου, το οποίο είναι

χαρακτηριστικό όλων των λύσεων τύπου Rankine. Αν η τραχύτητα ή η κλίση του τοίχου δεν εξασφαλίζει τη συνθήκη γενικευμένου πεδίου Rankine, οι παραπάνω Εξ. (4.4α-γ) δίνουν προσεγγιστικά μόνο τις ωθήσεις στον τοίχο, χωρίς όμως να παραβιάζουν πουθενά το κριτήριο αστοχίας, συνεπώς θα μπορούσαν να χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό, όπως υποστήριξε ο Saint-Venant. Στο σημείο αυτό ο Saint-Venant διατυπώνει, χωρίς να αποδεικνύει, το 3^ο θεώρημα (θεώρημα του κάτω ορίου) της θεωρίας πλαστικότητας (βλ Κεφάλαιο 1). Το ίδιο γεωμετρικό κριτήριο ώστε το πρόβλημα των εδαφικών ωθήσεων να παραμένει πρόβλημα ευθύγραμμων χαρακτηριστικών διατύπωσε και ο Considere (1870), εργαζόμενος ανεξάρτητα από τον Levy.

Κανένας από τους παραπάνω ερευνητές όμως, δεν επιχειρεί να αναπτύξει κάποια μέθοδο για τη γενική περίπτωση που το πρόβλημα δεν μπορεί να περιγραφεί με ένα συνεχές πεδίο τάσεων, το οποίο έχει ευθύγραμμες χαρακτηριστικές. Ο πρώτος που επιχειρεί να λύσει αυτό το πρόβλημα είναι ο Boussinesq (1876), ο οποίος διαχωρίζει το επίχωμα σε δύο περιοχές, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.2: μια ζώνη Rankine από $y = 0$ έως $y/x = \tan(\pi/4 - \phi/2) = \alpha$ (για οριζόντιο πρανές) μέσα στην οποία ισχύει η ομώνυμη λύση (Εξ. 4.10) και μια ζώνη Boussinesq από το παραπάνω σύνορο μέχρι τον τοίχο εντός της οποίας οι τάσεις αναζητούνται. Στη ζώνη Rankine οι τάσεις είναι:

$$\sigma_x = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\gamma y, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{4.10}$$



Σχήμα 4.2 Ανάλυση κατά Boussinesq (1876, 1882) (από Heyman, 1972)

Για τις τάσεις στη δεύτερη ζώνη, ο Boussinesq υποθέτει ότι έχουν τη μορφή γραμμικών συναρτήσεων ως προς x και y , και υπολογίζει τους άγνωστους συντελεστές έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας (Εξ. 4.5) και οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες των τάσεων (Εξ. 4.11):

$$\tau/\sigma_n = \tan \delta, \text{ στο } x = 0 \quad (4.11\alpha)$$

$$\sigma_y = \tau = 0, \text{ στο } y = 0 \quad (4.11\beta)$$

$$\tau/\sigma_n = \tan \varphi, \text{ στο } x = ay \quad (4.11\gamma)$$

εκ των οποίων η πρώτη αναφέρεται στη ζώνη Boussinesq ενώ οι δύο τελευταίες στη ζώνη Rankine και στη διεπιφάνεια των δύο περιοχών, αντίστοιχα. Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων δίνει τις ακόλουθες εκφράσεις (Εξ. 4.12):

$$\sigma_x = \frac{\gamma \tan^2 s (y + x \tan \delta)}{1 + \alpha \tan \delta}, \quad \sigma_y = \frac{\gamma (y + x \tan \delta)}{1 + \alpha \tan \delta}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma \alpha \tan \delta (ay - x)}{1 + \alpha \tan \delta} \quad (4.12)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν προκύψει έτσι ώστε να ικανοποιούν την ισορροπία, όχι όμως και το κριτήριο αστοχίας. Αν αντικατασταθούν στην έκφραση $[4\tau_{xy}^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2] / (\sigma_x + \sigma_y)^2$ (εξίσωση Mohr-Coulomb) τότε υπολογίζεται γωνία τριβής πάντοτε μεγαλύτερη από την πραγματική, όπως φαίνεται από την Εξ. (4.13). Η απόκλιση μάλιστα μεγαλώνει όσο αυξάνεται η τραχύτητα του τοίχου

$$\sin^2 \varphi' = \sin^2 \varphi + (1 - \sin \varphi)^2 \tan^2 \delta \left(\frac{ay - x}{ay + \alpha x \tan \delta} \right)^2 \quad (4.13)$$

Επομένως η λύση του Boussinesq παραβιάζει πάντοτε - και μάλιστα σημαντικά - το κριτήριο αστοχίας και δίνει αποτελέσματα πολύ χειρότερα από την προσεγγιστική λύση του Coulomb. Για αυτό το λόγο η συγκεκριμένη ανάλυση δεν βρήκε ποτέ απήχηση, με εξαίρεση τον Darwin (1883) ο οποίος συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των πειραμάτων του με τις μέχρι τότε γνωστές θεωρητικές λύσεις, διαπιστώνει ότι η εξίσωση του Boussinesq

για τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$) δίνει καλύτερα αποτελέσματα από ότι η λύση Rankine που αγνοεί την τραχύτητα του τοίχου, αν και τα πειράματα του είχαν πολύ μεγάλη διασπορά και μεγάλες αβεβαιότητες στον προσδιορισμό των παραμέτρων αντοχής. Παρ' όλα αυτά, η λύση Boussinesq αποτελεί εργασία σταθμό καθώς εισάγει την έννοια της ασυνέχειας των τάσεων, και για αυτό αναφέρεται σε όλες τις μετέπειτα θεωρητικές διερευνήσεις του 20^{ου} αιώνα, ειδικά σε αυτές της γαλλικής βιβλιογραφίας. Επίσης τον Boussinesq απασχολεί η περίπτωση των κεκλιμένων τοίχων που προτείνει ο Levy και διαπιστώνει το πρόβλημα που δημιουργείται όταν η κλίση του τοίχου είναι μεγαλύτερη από τη θεωρητική κλίση της ζώνης Rankine, οπότε αυτή δεν μπορεί να αναπτυχθεί.

4.2.3 Εξέλιξη της θεωρίας στον 20^ο αιώνα

Αμέσως μετά τον Boussinesq, στο πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα ασχολήθηκαν συστηματικά με το πρόβλημα της πλαστικής ισορροπίας σημαντικοί επιστήμονες όπως οι Kötter (1903), von Karman (1927) και Caquot (1934). Οι εργασίες τους συνέβαλαν στην καλύτερη κατανόηση της φύσης του προβλήματος και των δυσκολιών στην επίλυσή του, έδωσαν μια σειρά αξιόπιστων προσεγγιστικών λύσεων και έφεραν το πρόβλημα σε τέτοια μορφή ώστε να είναι επιλύσιμο με τις γνωστές σήμερα αριθμητικές μεθόδους, που μόλις τότε είχαν αρχίσει να αναπτύσσονται.

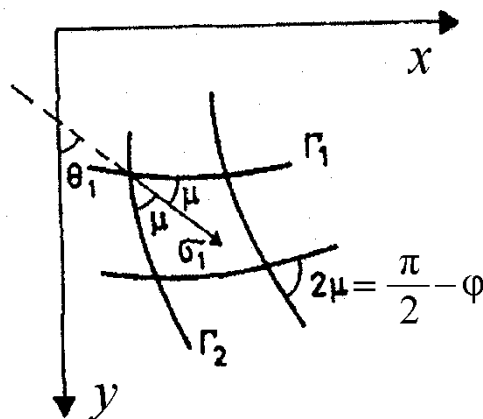
Μετά τα μισά του 20^{ου} αιώνα, νέες εξελίξεις επηρέασαν αποφασιστικά την εξέλιξη της επιστημονικής έρευνας πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. *Πρώτον*, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1, η διατύπωση των θεωρημάτων της πλαστικότητας και της οριακής ανάλυσης άνοιξε το δρόμο για την εμφάνιση πολλών, προσεγγιστικών, λύσεων άνω και κάτω ορίου οι οποίες φράσσουν ικανοποιητικά την ακριβή λύση. *Δεύτερον*, η εξέλιξη των καταστατικών μοντέλων με την εμφάνιση της θεωρίας της κρίσιμης κατάστασης έβαλε σε νέα βάση τον ορισμό της διατμητικής αστοχίας του εδάφους. *Τρίτον*, η εξέλιξη των υπολογιστικών μέσων έδωσε τεράστια ώθηση στην εξέλιξη των αριθμητικών μεθόδων με αποτέλεσμα να είναι εφικτή μια πλήρης ελαστοπλαστική ανάλυση του προβλήματος που να ενσωματώνει προηγμένα καταστατικά προσομοιώματα και να προβλέπει ταυτόχρονα δυνάμεις και μετατοπίσεις.

Όλα τα παραπάνω συνετέλεσαν στο να θεωρηθεί το πρόβλημα λυμένο από πρακτικής σκοπιάς και να εγκαταλειφθεί σταδιακά η προσπάθεια εύρεσης μιας ακριβούς μαθηματικής λύσης. Παρ' όλα αυτά, αφενός η θεωρητική σημασία μιας τέτοιας λύσης είναι κεφαλαιώδης και αφετέρου, η εξέλιξη των υπολογιστικών μέσων έχει ξαναφέρει στο

προσκήνιο τα αποτελέσματα της προηγούμενης, ξεχασμένης έρευνας (Martin, 2005). Στις ενότητες που ακολουθούν, ολοκληρώνεται η ιστορική αναδρομή με την παρουσίαση των διαφορετικών προσεγγίσεων του προβλήματος μέχρι τώρα και η συμβολή της παρούσας εργασίας με την εισαγωγή μιας νέας μορφοποίησης.

4.2.3.1 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών βασίζεται στη διατύπωση των εξισώσεων της ισορροπίας των τάσεων αστοχίας πάνω στις χαρακτηριστικές του προβλήματος ή γραμμές ολίσθησης. Πρόκειται για τις δύο οικογένειες καμπυλών Γ_1 και Γ_2 που τέμνονται υπό γωνία $\pi/2 - \varphi$ και έχουν σταθερή κλίση $\mu = \pi/4 - \varphi/2$ από τη μέγιστη κύρια τάση σ_1 , όπως απεικονίζεται στο Σχ. 4.3.



Σχήμα 4.3 Η γεωμετρία της μεθόδου των χαρακτηριστικών (τροποποιημένο από Absi, 1984)

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στην αστοχία δίνονται από τις Εξ. (4.14), συναρτήσει της ιστροπικής τάσης p (κέντρο του κύκλου) και της κλίσης θ_1 της διεύθυνσης της μέγιστης κύριας τάσης από τον κατακόρυφο άξονα y (ή του κύριου επιπέδου από τον οριζόντιο άξονα x).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p(1 + \sin \varphi \cos 2\theta_1) \\ \sigma_y &= p(1 - \sin \varphi \cos 2\theta_1) \\ \tau_{xy} &= p \sin \varphi \sin 2\theta_1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Αν οι παραπάνω εξισώσεις εισαχθούν στις εξισώσεις ισορροπίας (Εξ. 4.7) προκύπτει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων (4.15).

$$(1 + \sin \varphi \cos 2\theta_1) \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \varphi \sin 2\theta_1 \frac{\partial p}{\partial y} - 2p \sin \varphi \left(\sin 2\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \cos 2\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.15)$$

$$\sin \varphi \sin 2\theta_1 \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \sin \varphi \cos 2\theta_1) \frac{\partial p}{\partial y} + 2p \sin \varphi \left(\cos 2\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sin 2\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = \gamma$$

Οι συγκεκριμένες εξισώσεις είναι του υπερβολικού τύπου για οποιοδήποτε πραγματική περιβάλλουσα αστοχίας ($|\sin \varphi| \leq 1$). Η μέθοδος των χαρακτηριστικών είναι μια δημοφιλής τεχνική για την ολοκλήρωση των εξισώσεων αυτού του είδους, όταν το πρόβλημα αφορά μη-ομογενή πεδία, δηλαδή περιοχές στις οποίες οι συναρτήσεις δεν έχουν συνεχείς παραγώγους, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να προκύψει η λύση με τη μορφή του αναπτύγματος Taylor, ως πρόβλημα αρχικών τιμών. Αποδεικνύεται ότι το ολικό διαφορικό των εξισώσεων γίνεται συνεχές πάνω σε συγκεκριμένες οικογένειες τεμνόμενων καμπυλών (χαρακτηριστικές) και έτσι οι εξισώσεις γίνονται ολοκληρώσιμες σύμφωνα με την αρχή του Riemann (1860) (Abbott, 1967). Στη γενική περίπτωση και οι δύο οικογένειες είναι καμπυλόγραμμες. Ειδικότερες περιπτώσεις αποτελούν η περίπτωση των ημι-ομογενών πεδίων στα οποία η μία οικογένεια χαρακτηριστικών είναι ευθύγραμμη (Henky, 1923; Prandtl, 1920; 1923), όπως είναι το πρόβλημα του υλικού χωρίς βάρος και η περίπτωση των ομογενών πεδίων στα οποία και οι δύο οικογένειες είναι ευθύγραμμες, όπως είναι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η ζώνη Rankine.

Ανεξάρτητα από την ακριβή μορφή τους, η βασική ιδιότητα των χαρακτηριστικών, όπως προκύπτει από την Εξ. (4.16), είναι η σταθερή σχέση της κλίσης τους με την κλίση της μέγιστης κύριας τάσης.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left[\theta_1 \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (4.16)$$

Συνεπώς, αν οι Εξ. (4.15) εφαρμοστούν πάνω στις χαρακτηριστικές, τότε η γωνία θ_1 ισούται πάντοτε με $\pi/4 - \varphi/2$ και οι Εξ. (4.15) απλοποιούνται στις Εξ. (4.17)

$$(1 + \sin^2 \varphi) \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial y} - 2p \sin \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.17)$$

$$\sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \sin \varphi \cos \varphi) \frac{\partial p}{\partial y} + 2p \sin \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = \gamma$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\cos \varphi$ και $\sin \varphi$ αντίστοιχα και προσθέτοντας τις δύο σχέσεις, εξαφανίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς το y και εμφανίζονται μόνο οι παράγωγοι ως προς x , στη μορφή που εμφανίζει η Εξ. (4.18). Με περαιτέρω απλοποίηση της εξίσωσης, προκύπτουν οι γνωστές Εξ. (4.19), τις οποίες πρωτοδημοσίευσε ο Kötter (1903) και που ισχύουν κατά μήκος της χαρακτηριστικής a ή b

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cos \varphi - 2p \sin \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \gamma \sin \varphi \quad (4.18)$$

$$dp \mp 2p \tan \varphi d\theta_1 = V_{a,b} ds_{a,b} \quad (4.19a)$$

Στην Εξ. (4.19), με $V_{a,b}$ συμβολίζεται η προβολή των δυνάμεων πεδίου στη διεύθυνση της χαρακτηριστικής a και b αντίστοιχα. Η έκφραση μπορεί να γραφεί στην ακόμα πιο συνεπτυγμένη μορφή της Εξ. (4.19b), με τη χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\pm 2 \tan \varphi \theta_1}$

$$\frac{d}{ds_{a,b}} \left(p e^{\pm 2 \tan \varphi \theta_1} \right) = V_{a,b} e^{\pm 2 \tan \varphi \theta_1} \quad (4.19b)$$

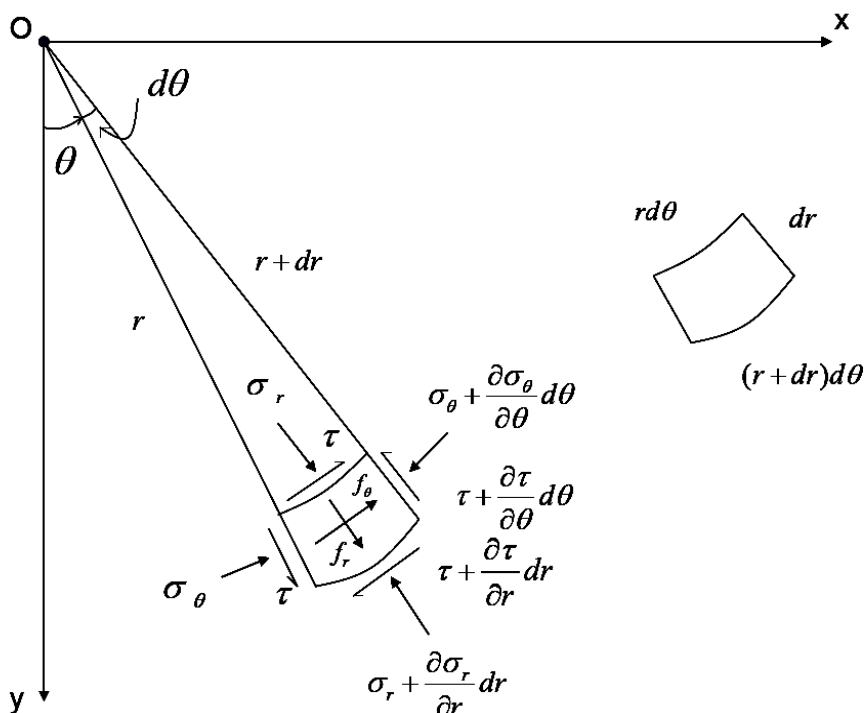
Η δυσκολία εύρεσης ακριβούς αναλυτικής λύσης έγκειται στην παρουσία του σταθερού όρου στο δεξιό μέλος που εκφράζει τις δυνάμεις πεδίου. Λύσεις σε πραγματικά προβλήματα μηχανικού, βασισμένα στη μέθοδο των χαρακτηριστικών, εμφανίζονται λίγο αργότερα με τις εργασίες των Prandtl (1920) και Reissner (1924) όπου δημοσιεύονται για πρώτη φορά κλειστές αναλυτικές λύσεις για το υλικό χωρίς βάρος (για $\gamma = 0$ οι Εξ. (4.19) δίνουν το γνωστό αποτέλεσμα $e^{\pm 2\theta \tan \varphi}$). Η ολοκλήρωση των εξισώσεων για το πρόβλημα με βάρος μπορεί να γίνει αριθμητικά, με τη δημιουργία ενός καννάβου πεπερασμένων διαφορών στο επίπεδο, η επίλυση του οποίου ξεκινάει από το άκρο στο οποίο οι

συνοριακές συνθήκες είναι γνωστές. Αριθμητικά αποτελέσματα αυτού του είδους για μεγάλο αριθμό προβλημάτων παρήγαγε ο Sokolonskii από το 1939 έως το 1957, ενώ ο Berezantsev (1948) επέκτεινε τις λύσεις των χαρακτηριστικών σε τρισδιάστατα, αξονοσυμμετρικά προβλήματα. Από τότε μέχρι σήμερα η μέθοδος των χαρακτηριστικών αποτελεί ένα από τα βασικά εργαλεία ανάλυσης (Lee & Herington, 1972; Habibagahi & Ghahramani, 1977; Kumar & Chitikela, 2002; Cheng, 2003; Cheng et al., 2008).

4.2.3.2 Το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες – η ιδιότητα της αυτοομοιότητας

Η αλλαγή του προβλήματος σε πολικές συντεταγμένες δεν είναι απλά πιο βολική για τοίχο απείρου μήκους, δεδομένης της γεωμετρίας του προβλήματος. Όπως θα αποδειχθεί αργότερα, η επιλογή αυτή οδηγεί σε σημαντική απλοποίηση του προβλήματος με την απαλοιφή μιας εκ των ανεξάρτητων μεταβλητών, μέσω της ιδιότητας της αυτοομοιότητας.

Στο Σχ. 4.4 παρουσιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και η αντίστοιχη προσήμανση των μεταβλητών, ενώ στο Σχ. 4.5 ο προσανατολισμός της μέγιστης κύριας τάσης και των χαρακτηριστικών για το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες.



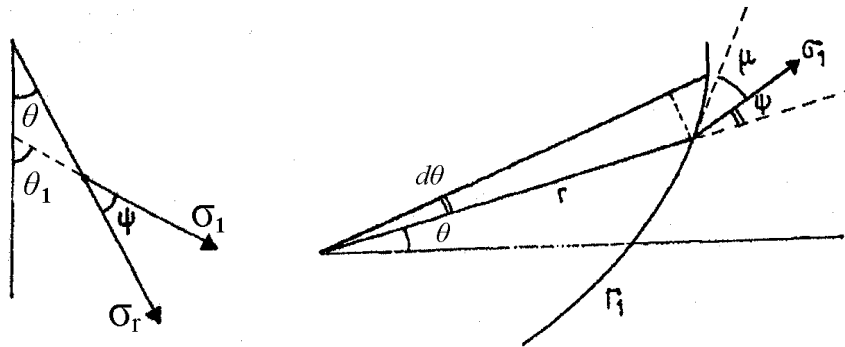
Σχήμα 4.4 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος και γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχειώδους τμήματος αντιστηριζόμενου υλικού σε πολικές συντεταγμένες

Στο συγκεκριμένο σύστημα αξόνων οι εξισώσεις ισορροπίας του αντιστηριζόμενου εδάφους παίρνουν τη μορφή των Εξ. (4.20α, β)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = f_r \tag{4.20α}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = f_\theta \tag{4.20β}$$

όπου $f_r = \gamma \cos \theta$ και $f_\theta = -\gamma \sin \theta$ η ακτινική και η εφαπτομενική συνιστώσα των δυνάμεων πεδίου, ενώ οι Εξ. (4.14) μετασχηματίζονται στις Εξ. (4.21)



Σχήμα 4.5 Προσανατολισμός κυρίων τάσεων και χαρακτηριστικών για το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες (τροποποιημένο από Absi, 1984)

$$\sigma_r = p [1 + \sin \varphi \cos 2(\theta_1 - \theta)]$$

$$\sigma_\theta = p [1 - \sin \varphi \cos 2(\theta_1 - \theta)] \tag{4.21}$$

$$\tau_{r\theta} = p \sin \varphi \sin 2(\theta_1 - \theta)$$

Οι χαρακτηριστικές του προβλήματος τώρα ικανοποιούν την Εξ. (4.22).

$$r \frac{d\theta}{dr} = \tan \left[\psi \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \tag{4.22}$$

Με τη βοήθεια των Εξ. (4.21) και (4.22) μπορεί κάποιος να επαναλάβει την αναλυτική διαδικασία της προηγούμενης υποενότητας και να καταλήξει πάλι στις εξισώσεις Kötter, χωρίς δηλαδή ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων να οδηγήσει σε κάποιο πρακτικό αποτέλεσμα. Όμως, ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες επιτρέπει διαφορετικό χειρισμό των εξισώσεων βάσει της σημαντικής ιδιότητας της αυτοομοιότητας.

Το πρόβλημα ενός τοίχου απείρου ύψους (απειρομήκης σφήνα) δεν περιέχει κανένα χαρακτηριστικό μήκος. Με δεδομένο ότι το μοναδικό άλλο μέγεθος με διαστάσεις είναι το ειδικό βάρος του εδάφους, δεν υπάρχει δυνατότητα κανονικοποίησης της μεταβλητής r με διαστάσεις μήκους, ως πιθανό όρισμα «ειδικής» συνάρτησης (π.χ. τριγωνομετρικού ή υπερβατικού τύπου). Η μόνη φυσική δυνατότητα είναι η εξάρτηση της λύσης από ένα μονώνυμο του r με δύναμη που ικανοποιεί διαστατικά τη λύση. Συναρτήσεις αυτού του τύπου έχουν την ιδιότητα να απεικονίζονται στον εαυτό τους μέσα από ανακλιμάκωση της μεταβλητής r (δηλαδή μέσω μεταφορά της στον παρονομαστή του μέλους της λύσης). Αυτό έχει ως συνέπεια οι τάσεις να μπορούν να γραφούν σε διαχωρισμένη μορφή, σύμφωνα με τη σχέση (Γεωργιάδης, 2003):

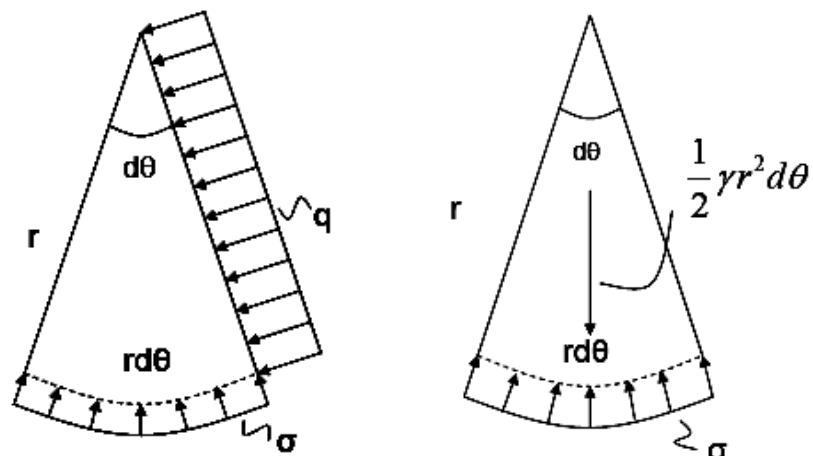
$$\sigma_{ij} = f(r) g(\theta) \quad (4.23)$$

όπου $f(r)$ ένα προσδιορισμένο μονώνυμο της ακτινικής απόστασης r . Με βάση τη συγκεκριμένη ιδέα, για υλικό χωρίς βάρος και με βάρος αντίστοιχα, προκύπτουν οι σχέσεις αναλογίας (4.24) και (4.25), βάσει και του Σχ. 4.6

$$\sigma r d\theta \propto q r \Rightarrow \sigma = q g(\theta) \quad (4.24)$$

$$\sigma r d\theta \propto \frac{1}{2} \gamma r^2 d\theta \Rightarrow \sigma = \gamma r g(\theta) \quad (4.25)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι οι τάσεις στο εσωτερικό της σφήνας δεν εξαρτώνται από το r στο υλικό χωρίς βάρος, ενώ για υλικό με βάρος ισχύει $f(r) = \gamma r$, δηλαδή οι τάσεις στο εδαφικό μέσο είναι ανάλογες του r . Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται η χρησιμότητα της ιδιότητας της αυτοομοιότητας σε ορισμένες εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης που έχουν δημοσιευτεί, πέρα από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών και βέβαια η χρήση της στην παρούσα εργασία.



Σχήμα 4.6 Σχέση εσωτερικών τάσεων σ και εξωτερικής φόρτισης q (α) για υλικό χωρίς βάρος και (β) για υλικό με βάρος

4.2.3.3 Εναλλακτικό σύστημα εξισώσεων

Αν κανείς αντικαταστήσει τις Εξ. (4.22) (τάσεις αστοχίας) στις Εξ. (4.21) (εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές συντεταγμένες) και θεωρήσει ότι οι άγνωστοι p και θ_1 είναι συναρτήσεις μόνο του θ και ανεξάρτητες του r (Εξ. 4.26), προκύπτει το σύστημα των δύο συνήθων διαφορικών Εξ. (4.27), το οποίο είναι πρώτης τάξης, μόνο ως προς τη μεταβλητή θ , σε πεπλεγμένη μορφή

$$p = \gamma r S(\theta), \quad \theta_1 = \theta_1(\theta) \tag{4.26}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{S \sin 2(\theta_1 - \theta) - \sin(2\theta_1 - \theta)}{\cos 2(\theta_1 - \theta) - \sin \varphi} \tag{4.27}$$

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{\cos \theta - \sin \varphi \cos(2\theta_1 - \theta) - S \cos^2 \varphi}{2S \sin \varphi [\cos 2(\theta_1 - \theta) - \sin \varphi]}$$

Σύμφωνα με τον Martin (2005), οι εξισώσεις αυτές παρουσιάστηκαν πρώτη φορά από τον von Karman (1927). Με την ίδια ή παρεμφερή μορφή (συνήθως χρησιμοποιείται η γωνία ψ αντί της θ_1) μπορούν να βρεθούν σε διάφορα γαλλικά συγγράμματα, όπως αυτά των Costet & Sanglerat (1975), Salencon (1977) και Absi (1984). Ο Salencon προτείνει

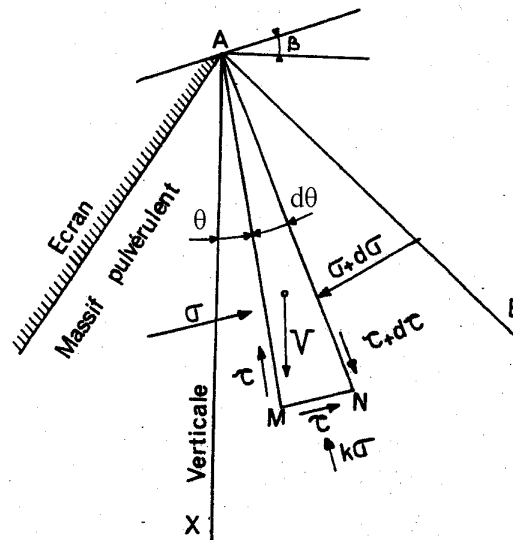
μια αριθμητική μέθοδο τύπου δοκιμής και σφάλματος (trial & error) για την επίλυσή τους, η οποία βασίζεται στις δύο γνωστές συνοριακές συνθήκες (τιμή της κλίσης θ_l πάνω στον τοίχο, τιμή των S και θ_l πάνω στο όριο με τη ζώνη Rankine), ενώ οι Costet & Sanglerat αναφέρουν μια αριθμητική επίλυση στο πανεπιστήμιο της Grenoble από τους Caquot & Kerisel, τα αποτελέσματα της οποίας δημοσιεύτηκαν στην επανέκδοση του βιβλίου τους το 1966. Στην πρόσφατη εργασία του, ο Martin (2005) επισημαίνει το γεγονός ότι αυτές οι λύσεις που είχαν εγκαταλειφθεί παλιότερα λόγω των δυσκολιών που παρουσίαζαν στον αριθμητικό τους χειρισμό, αποκτούν νέο ενδιαφέρον με τα σημερινά υπολογιστικά μέσα. Αποδεικνύει ότι η αριθμητική λύση του παραπάνω συστήματος είναι πολύ πιο εύκολη και γρήγορη σε σχέση με τη διαδοδομένη μέθοδο των χαρακτηριστικών, η οποία απαιτεί διακριτοποίηση του διδιάστατου χώρου με πεπερασμένες διαφορές, ενώ οδηγεί στα ίδια ακριβή αποτελέσματα.

4.2.3.4 Η προσέγγιση του Caquot (1934, 1948)

Η πρώτη επιτυχής αριθμητική επίλυση, τα αποτελέσματα της οποίας δημοσιεύτηκαν σε μορφή πινάκων για χρήση από τους μηχανικούς (Caquot & Kerisel, 1948) είναι προφανές ότι δεν μπορούν να έχουν προκύψει από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών ή την αριθμητική λύση του συστήματος των Εξ. (4.28), καθαρά λόγω της ανυπαρξίας των υπολογιστικών μέσων την εποχή εκείνη. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν από ένα απλούστερο μαθηματικά, αλλά όχι μικρότερης επιστημονικής αξίας, μοντέλο, του οποίου η τελική λύση είναι σε μεγάλο βαθμό προσεγγιστική. Οι επόμενες επανεκδόσεις των πινάκων (Caquot & Kerisel, 1966; Kerisel & Absi, 1990) έχουν προκύψει από ακριβέστερες αριθμητικές επιλύσεις σε άλλο προφανώς σύστημα εξισώσεων (π.χ. Εξ. 4.27), χωρίς να είναι γνωστές οι λεπτομέρειες της ανάλυσης.

Η αυθεντική ανάλυση του Caquot απεικονίζεται στο Σχ. 4.7 και βασίζεται στην οριακή ισορροπία μιας τριγωνικής σφήνας σε πολικές συντεταγμένες. Από ισορροπία ροπών και δυνάμεων προκύπτει το σύστημα των δύο απλών διαφορικών εξισώσεων (4.28). Ο Caquot χρησιμοποιεί την ιδιότητα της αυτοομοιότητας και γράφει τις τάσεις στη μορφή των Εξ. (4.29), όπου οι άγνωστοι συντελεστές n , t και k είναι συναρτήσεις μόνο του θ . Στη συνέχεια εισάγει μια συνάρτηση δυναμικού $F(\theta)$ η οποία ικανοποιεί ταυτοτικά τις εξισώσεις ισορροπίας και την αναπτύσσει σε μορφή σειράς Taylor. Στη συνέχεια, από τον τανυστή των τάσεων στην αστοχία καταλήγει σε μια αναλυτική έκφραση για τον

συντελεστή k ο οποίος είναι ο λόγος της ακτινικής προς την εφαπτομενική ορθή τάση και είναι προφανώς συνάρτηση του άγνωστου λόγου τ/σ_θ .



Σχήμα 4.7 Η ανάλυση κατά Caquot (1934)

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} = (2k - 1)\sigma - \cos \theta \tag{4.28}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 3\tau_{r\theta} - \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \gamma nr, \quad \sigma_r = k\sigma_\theta, \quad \tau_{r\theta} = -\gamma r t \tag{4.29}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων ο Caquot μελετάει τη συμπεριφορά των εξισώσεων μέσα στη ζώνη Boussinesq. Είναι ο πρώτος που αναφέρει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις που ικανοποιούν την πλαστική ισορροπία και τις συνοριακές συνθήκες Rankine, με μόνο μία να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη στον τοίχο, που είναι η κλίση της αντίστοιχης ώθησης επί του τοίχου. Απέδειξε επίσης ότι η αρχική ασυνέχεια της ζώνης Rankine είναι επιφάνεια απροσδιοριστίας και συνεπώς αποκλείεται μια λύση τύπου αρχικών τιμών. Επίσης έδειξε ότι η μεταβολή των τάσεων μέσα στη ζώνη Boussinesq καθορίζεται από το λόγο τ/σ_θ , δηλαδή από την κλίση της τάσης πάνω στις ασυνέχειες. Η ανάλυση του Caquot παρουσιάζεται πιο λεπτομερώς στο σύγγραμμα του Absi (1984). Σύμφωνα με τον Sokolovskii (1965), παρόμοια διαδικασία επίλυσης ακολούθησε και ο

von Karman (1927) με ισορροπία σφήνας και ανάπτυξη της λύσης σε σειρά Taylor.

4.2.3.5 Η χρήση της συνάρτησης δυναμικού ή συνάρτηση Airy (1862)

Έχει γίνει ήδη αναφορά στη χρήση της συγκεκριμένης τεχνικής από τις εργασίες των Levy (1873) και Saint-Venant (1870). Αργότερα τη συναντάμε στην εργασία του Reissner (1924) και αργότερα, με διαφορετική χρήση, στον Caquot. Η δυσκολία με τη συγκεκριμένη τεχνική, όπως είχε διαπιστώσει και ο Saint-Venant, είναι η μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού και δευτέρας τάξης που προκύπτει όταν εισαχθούν οι Εξ. (4.6) στο κριτήριο αστοχίας (Εξ. 4.7) η οποία έχει τη μορφή της Εξ. (4.30)

$$4\Phi_{xy}^2 + (\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \gamma y)^2 = \sin^2 \varphi (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \gamma y)^2 \quad (4.30)$$

όπου $\Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\Phi_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ και $\Phi_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ οι μερικές παράγωγοι της Φ ως προς τους

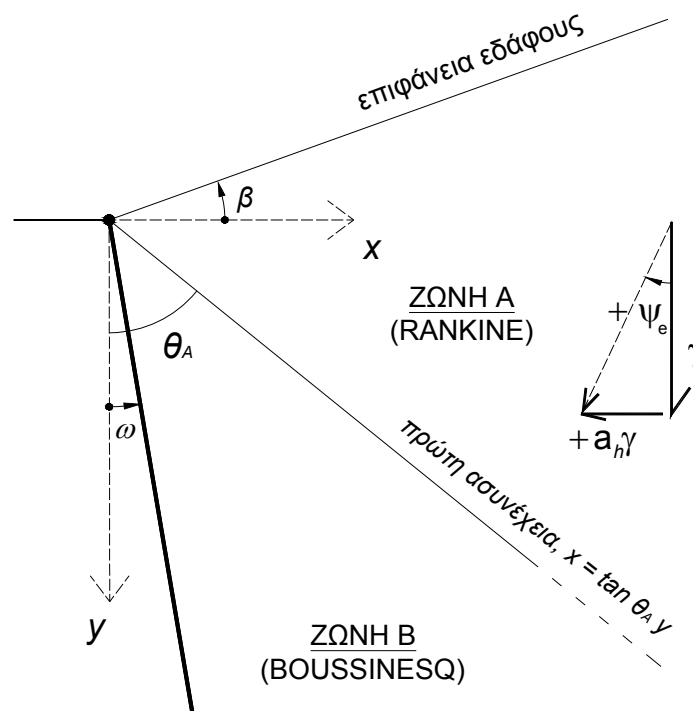
αναγραφόμενους δείκτες. Προσπάθειες για να απλοποιηθεί αυτή η έκφραση έχουν σημειωθεί στη βιβλιογραφία, σε περιορισμένη όμως έκταση. Ο Nadai (1963) αναγνωρίζοντας ότι οι όροι της παραπάνω εξίσωσης εκφράζουν τις ποσότητες $\tau_{r\theta}$, $(\sigma_r - \sigma_\theta)$, $(\sigma_r + \sigma_\theta)$, εξίσωσε τα αντίστοιχα μέρη με τις εκφράσεις που προκύπτουν από τις Εξ. (4.15) και εξήγαγε ένα σύστημα τριών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Η χρήση πολικών συντεταγμένων και της αυτοομοιότητας επιτρέπει τη μετατροπή του σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Και σε αυτήν τη μορφή όμως, οι περιπτώσεις που επιτρέπουν αναλυτική λύση είναι πολύ περιορισμένες. Συγκεκριμένα, ο Nadai παρουσιάζει ένα ζεύγος ειδικών λύσεων για το κλασικό πρόβλημα του Jaky (1944), δηλαδή του τριγωνικού αναχώματος με πρηνή κλίσης $\beta = -\varphi$ αλλά και του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή μιας τριγωνικής κοιλάδας με πρηνή $\beta = \varphi$. Η συγκεκριμένη λύση δίνει μια καλύτερη εξήγηση του συγκεκριμένου πεδίου τάσεων από πιο πρόσφατες διερευνήσεις (Michalowski, 2005; Pipatrongsa & Vardhanabhuti, 2009) οι οποίες χρησιμοποιούν ζώνες Rankine εξωτερικά και κεντρική μεταβατική ζώνη με προσεγγιστικές συναρτήσεις για τη μεταβολή της διατμητικής τάσης. Πριν από τον Nadai, ο Samsioe (1955) εφάρμοσε μια παρόμοια ανάλυση για τον υπολογισμό των τάσεων κάτω από φράγμα τριγωνικής διατομής. με χρήση της συνάρτησης Airy σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ο Malyshev (1969) εφάρμοσε τη συνάρτηση Airy σε μια γραμμικοποιημένη μορφή του κριτηρίου Mohr - Coulomb, ωστόσο η λύση του ήταν προσεγγιστική καθώς θεώρησε σταθερούς συντελεστές κατά την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης. Λίγα χρόνια αργότερα, ο Azarog (1975), συνεχίζοντας την ιδέα του Malyshev, εφάρμοσε μια διαφορετική τεχνική γραμμικοποίησης της εξίσωσης, ενώ εξέφρασε τη λύση σε μορφή σειράς διαταραχών, κάνοντας μάλλον πιο πολύπλοκη τη λύση, ενώ δεν απέφυγε τις προσεγγίσεις (και τα αναλυτικά σφάλματα). Η τεχνική γραμμικοποίησης του Azarog θα παρουσιαστεί στις επόμενες ενότητες καθώς χρησιμοποιείται και στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, η οποία επίσης βασίζεται στη χρήση της συνάρτησης Airy.

4.3 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4.3.1 Το υπό εξέταση πρόβλημα

Στο πλαίσιο της προτεινόμενης έρευνας, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του Boussinesq, για γενικευμένη γεωμετρία (κεκλιμένος τοίχος και πρανές) και γενικευμένη βαρυτική και σεισμική φόρτιση. Το πρόβλημα υπό εξέταση απεικονίζεται στο Σχ. 4.8, οι παράμετροι του οποίου έχουν παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 2.



Σχήμα 4.8 Το υπό εξέταση πρόβλημα

Η προτεινόμενη λύση βασίζεται στη χρήση της συνάρτησης Airy η οποία έχει ήδη παρουσιαστεί σε προηγούμενες ενότητες. Ο προσδιορισμός της συνάρτησης για τη ζώνη Rankine, στην οποία είναι γνωστές οι τάσεις προκύπτει πολύ εύκολα με ολοκλήρωση των Εξ. (4.6). Στην πιο απλή περίπτωση του προβλήματος του Boussinesq ($\beta = \omega = a_h = 0$) η ολοκλήρωση των Εξ. (4.11) ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y δίνει:

$$\text{από } \sigma_x : \Phi(x, y) = \frac{1}{6} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \gamma y^3 + f(x)$$

$$\text{από } \sigma_y : \Phi(x, y) = g(y)$$

$$\text{από } \tau_{xy} : \Phi(x, y) = f(x) + g(y)$$

$$\text{Άρα, } f(x) = 0, \quad g(y) = \frac{1}{6} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \gamma y^3 \quad \text{και συνεπώς}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{6} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \gamma y^3 \tag{4.31}$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.31) στο κριτήριο αστοχίας (Εξ. 4.30) προκύπτει η Εξ.(4.32) η οποία ικανοποιείται ταυτοτικά

$$\left[1 - \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2 = \sin^2 \varphi \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2 \tag{4.32}$$

Ως δεύτερο παράδειγμα δίνεται η περίπτωση των λύσεων για κεκλιμένο πρανές (Rankine, 1857; Levy 1873; Saint-Venant, 1870). Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.8) δίνει την παρακάτω συνάρτηση δυναμικού Εξ. (4.33), η οποία ικανοποιεί επίσης την Εξ. (4.30), η οποία για $\beta = 0$, μεταπίπτει στην Εξ. (4.31)

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{6} \gamma \lambda^2 \cos^2 \beta y^3 + \frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \sin \beta \cos \beta x y^2 + \frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \sin^2 \beta x^2 y + \frac{1}{6} \gamma (1 + \lambda^2 \sin^2 \beta) \tan \beta x^3 \tag{4.33}$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\cos \beta}{\cos \varphi} - \left(\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Το πρόβλημα που παραμένει είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης Φ , μέσα στη ζώνη Boussinesq, κάτι το οποίο θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το πεδίο των τάσεων στην κατάσταση της πλαστικής ισορροπίας.

4.3.2 Μετατροπή της εξίσωσης σε πολικές συντεταγμένες και απλοποίηση σε συνήθη διαφορική εξίσωση

4.3.2.1 Γενική μορφή

Οι εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές συντεταγμένες (Εξ. 4.20) ικανοποιούνται από τις Εξ. (4.34), όπου $\Phi = \Phi(r, \theta)$ η συνάρτηση Airy σε πολικές συντεταγμένες, ενώ με V συμβολίζεται η συνάρτηση δυναμικού των δυνάμεων πεδίου, η οποία στη γενική περίπτωση (εάν θεωρηθεί διαφορετική στην σ_r και διαφορετική στη σ_θ) οφείλει να έχει τη μορφή των Εξ. (4.35α) και (4.35β), ώστε οι Εξ. (4.34α) και (4.34β) αντίστοιχα να ικανοποιούν τις Εξ. (4.20).

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + V \quad (4.34\alpha)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + V \quad (4.34\beta)$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (4.34\gamma)$$

$$V = \int f_r dr - \frac{1}{r} \iint f_r dr + \frac{r}{2} \int f_\theta d\theta \quad (4.35\alpha)$$

$$V = r \int f_\theta d\theta \quad (4.35\beta)$$

Με την παραδοχή ότι οι συναρτήσεις f_r και f_θ είναι συναρτήσεις του θ (δηλαδή όχι

του r) κι ο προσανατολισμός της συνολικής δράσης πεδίου είναι σταθερός σε όλη τη μάζα του υλικού, όπως υποθέτει το κλασικό πρόβλημα, η Εξ. (4.35α) απλοποιείται στην Εξ. (4.36) η οποία ισούται με την Εξ. (4.35β) εάν ισχύει $f_r = \int f_\theta d\theta$ ή διαφορετικά $f'_r = f_\theta$

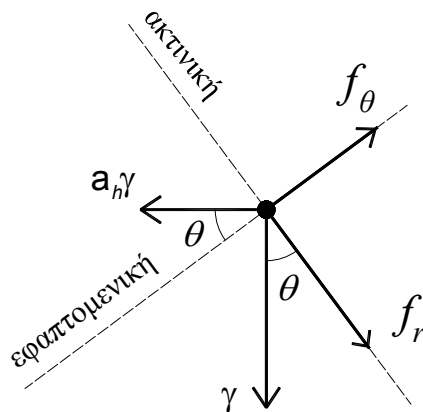
$$V = \frac{r}{2} f_r + \frac{r}{2} \int f_\theta d\theta \tag{4.36}$$

Πράγματι, όπως φαίνεται και από το Σχ. 4.9, οι δυνάμεις πεδίου δίνονται από τις Εξ. (4.37), οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω προϋπόθεση. Συνεπώς, η συνάρτηση δυναμικού των δυνάμεων πεδίου δίνεται από την Εξ. (4.38)

$$f_r = \gamma (\cos \theta - \alpha_h \sin \theta) = \gamma \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \tag{4.37\alpha}$$

$$f_\theta = \gamma (-\sin \theta - \alpha_h \cos \theta) = -\gamma \sin \theta \left(1 + \frac{\tan \psi_e}{\tan \theta} \right) \tag{4.37\beta}$$

$$V = r f_r \tag{4.38}$$



Σχήμα 4.9 Γεωμετρικός μετασχηματισμός των δυνάμεων πεδίου στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση

Για υλικό χωρίς συνοχή, το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr - Coulomb σε πολικές συντεταγμένες γράφεται στην παρόμοια με την Εξ. (4.7) μορφή

$$4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 \quad (4.39)$$

Αν αντικατασταθούν οι Εξ. (4.37) στο κριτήριο αστοχίας, λαμβάνεται η ακόλουθη μη-γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $\Phi(r, \theta)$

$$4\left(\frac{1}{r}\Phi_\theta\right)_r^2 + \left(\frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} - \Phi_{rr}\right)^2 = \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \Phi_{rr} + 2rf_r\right)^2 \quad (4.40)$$

όπου $\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_{rr}, \Phi_{\theta\theta}$ οι μερικές παράγωγοι της Φ ως προς τους αναγραφόμενους δείκτες.

4.3.2.2 Εφαρμογή αυτοομοιότητας

Αν τώρα εφαρμοστεί η ιδιότητα της αυτοομοιότητας σύμφωνα με τις Εξ. (4.24) και (4.25), προκύπτει ότι για υλικό χωρίς βάρος ισχύει η Εξ. (4.41) και για το υλικό με βάρος η Εξ. (4.42)

$$\Phi(r, \theta) = r^2 X(\theta) \quad (4.41)$$

$$\Phi(r, \theta) = r^3 X(\theta) \quad (4.42)$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (4.41) και (4.42) στις (4.34) και (4.40), οι εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

α) για υλικό χωρίς βάρος

$$\sigma_r = 2X(\theta) + X''(\theta), \quad \sigma_\theta = 2X(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -X'(\theta) \quad (4.43 \alpha, \beta, \gamma)$$

$$4X'(\theta)^2 + X''(\theta)^2 = \sin^2 \varphi [4X(\theta) + X''(\theta)]^2 \quad (4.44)$$

β) για υλικό με βάρος

$$\sigma_r = \gamma r [3X(\theta) + X''(\theta) + \bar{f}_r], \quad \sigma_\theta = \gamma r [6X(\theta) + \bar{f}_r], \quad \tau_{r\theta} = -\gamma r [2X'(\theta)] \quad (4.45 \alpha, \beta, \gamma)$$

όπου $\bar{f}_r = f_r / \gamma$, ενώ το κριτήριο Mohr - Coulomb γίνεται

$$16X'(\theta)^2 + [-3X(\theta) + X''(\theta)]^2 = \sin^2 \varphi [9X(\theta) + X''(\theta) + 2\bar{f}_r]^2 \quad (4.46)$$

Από τις Εξ. (4.44) και (4.46) παρατηρείται ότι δεν διαφέρουν μόνο ως προς τον όρο των δυνάμεων πεδίου $2\overline{f_r}$ αλλά και ως προς τους σταθερούς συντελεστές που πολλαπλασιάζουν τις διάφορες παραγώγους της συνάρτησης δυναμικού $X(\theta)$. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι μεταφέρεται με διαφορετικό τρόπο (διαφορετική τασική συνάρτηση και διαφορετική διαφορική εξίσωση) η τάση που ασκεί η επιφόρτιση σε υλικό με βάρος από ότι σε αβαρές. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί άλλη μια απόδειξη ότι δεν ισχύει θεωρητικά η ευρέως χρησιμοποιούμενη αρχή της υπέρθεσης των λύσεων για το ίδιο βάρος και την επιφόρτιση, η οποία όμως έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί συντηρητική προσέγγιση, προς το πλευρό της ασφαλείας, για το συγκεκριμένο πρόβλημα (Salençon, 1972; Costet & Sanglerat, 1975).

4.3.2.3 Ακριβείς λύσεις – ειδικές περιπτώσεις

Ακριβώς όπως και στη μέθοδο των χαρακτηριστικών, η παρουσία του όρου $2\overline{f_r}$ στο δεξιό μέλος καθιστά αδύνατη την επίλυση της Εξ. (4.46) με κάποια από τις γνωστές τεχνικές, π.χ. με εκθετική αντικατάσταση. Αντίθετα, η Εξ. (4.44) η οποία αντιστοιχεί στο αβαρές μέσο, είναι σχετικά εύκολη. Πράγματι, αν υποθεθεί λύση της μορφής

$$X(\theta) = De^{m\theta} \quad (4.47)$$

όπου D αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης, λαμβάνεται η διακρίνουσα εξίσωση

$$4m^2 + m^4 = \sin^2 \varphi (4 + m^2)^2 \quad (4.48)$$

η οποία οδηγεί στη διτετράγωνη εξίσωση

$$(1 - \sin^2 \varphi)m^4 + 4(1 - 2\sin^2 \varphi)m^2 - 16\sin^2 \varphi = 0 \quad (4.49)$$

Η τελευταία ικανοποιείται από τις λύσεις

$$m^2 = 4 \tan^2 \varphi \text{ και } m^2 = -4 \quad (4.50\alpha, \beta)$$

Το πρώτο ζεύγος λύσεων οδηγεί στην κλασική λύση για το αβαρές υλικό (Reissner, 1924)

$$X(\theta) = De^{\pm 2i \tan \phi \theta} \quad (4.51)$$

στην οποία το διπλό πρόσημο αναφέρεται στην ενεργητική ή στην παθητική περίπτωση, χωρίς να ισχύει η υπέρθεση των δύο λύσεων, λόγω της μη γραμμικότητας. Το δεύτερο ζεύγος λύσεων

$$X(\theta) = De^{\pm 2i \theta} \quad (4.52)$$

οδηγεί στο αποτέλεσμα $S = \left[2 + (\pm 2i)^2 / 2 \right] X(\theta) = 0$, $R = \left[4(\pm 2i)^2 + (\pm 2i)^4 \right]^{1/2} = 0$ το οποίο αντιστοιχεί στην τετριμμένη λύση του αφόρτιστου ριπιδίου.

4.3.2.4 Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

1^η συνοριακή συνθήκη: Ζώνη Rankine

Για τη ζώνη Rankine είναι γνωστή η μορφή της εξίσωσης $X(\theta)$. Αν για παράδειγμα μετασχηματιστεί η Εξ. (4.33) σε πολικές συντεταγμένες βάσει των σχέσεων $x = r \sin \theta$ και $y = r \cos \theta$, προκύπτει η Εξ. (4.53) η οποία ικανοποιεί τη διαφορική Εξ. (4.46).

$$X(\theta) = \frac{1}{6} \lambda^2 \cos^2 \beta \left[\cos^3 \theta + 3 \tan \beta \sin \theta \cos^2 \theta + 3 \tan^2 \beta \sin^2 \theta \cos \theta + (\sin^2 \beta + \lambda^{-2}) \frac{\tan \beta}{\cos^2 \beta} \sin^3 \theta \right] \quad (4.53)$$

Για οριζόντιο πρανές ($\beta = 0$), η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται στην Εξ. (4.54), η οποία είναι αντίστοιχη της Εξ. (4.31)

$$X(\theta) = \frac{1}{6} \lambda^2 \cos^3 \theta \quad (4.54)$$

Μια πιο απλή έκφραση για τη $X(\theta)$ μπορεί να προκύψει από τον ταυυστή των τάσεων του πρανούς, που έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 2. Μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού σε πολικές συντεταγμένες $z = r \cos(\theta - \beta) / \cos \beta$, η εξίσωση που παρέχει την ορθή τάση στα επίπεδα παράλληλα στο πρανές (Εξ. 2.1 – Κεφάλαιο 2) γίνεται

$$\sigma_\beta = \gamma r \cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \quad (4.55)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί εναλλακτική έκφραση της Εξ. (4.53), και συνεπώς ικανοποιεί την Εξ. (4.46). Για οριζόντιο πρανές χωρίς σεισμό ($\beta = \psi_e = 0$) η (4.57) απλοποιείται στην Εξ. (4.58) η οποία αποτελεί εναλλακτική μορφή της Εξ. (4.31)

$$X(\theta)_{Rankine} = \frac{1}{6} \cos \theta \left(\frac{1 + \sin \varphi \cos 2\theta}{1 - \sin \varphi} - 1 \right) = \frac{1}{6} \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cos^3 \theta \quad (4.58)$$

Για τη γενική περίπτωση, η κλίση της χαρακτηριστικής γραμμής τάσεων που διαχωρίζει τις ζώνες Rankine και Boussinesq, ως προς την κατακόρυφη, γωνία θ_A είναι

$$\theta_A = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\Delta_1 + \beta - \psi_e}{2} \quad (4.59)$$

Πάνω στην επιφάνεια αυτής της ασυνέχειας όπου οι τάσεις είναι γνωστές, μπορούν να υπολογιστούν τόσο η τιμή της συνάρτησης $X(\theta_A)$, όσο και οι πρώτες δύο παράγωγοι της $X'(\theta_A)$ και $X''(\theta_A)$. Επομένως, παρά το γεγονός ότι πάνω στη χαρακτηριστική ισχύουν συνοριακές συνθήκες τύπου Cauchy (συνθήκες Dirichlet και Neumann μαζί στο ίδιο σύνορο), το πρόβλημα των τάσεων από τη χαρακτηριστική ως τον τοίχο δεν είναι πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως απέδειξε ο Caquot (Absi, 1984). Ως πρόβλημα αρχικών τιμών μπορούν να προσδιοριστούν οι τάσεις από τη χαρακτηριστική μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια (Ζώνη Rankine). Επίσης εξ' ορισμού πάνω στη χαρακτηριστική ισχύει $\tau_{r\theta} / \sigma_\theta = \tan \varphi$ κάτι που επιβεβαιώνεται και από το λόγο $-2X'(\theta_A) / [6X(\theta_A) + f_r(\theta_A)]$, η οποία είναι μια διαφορετικού είδους μεικτή συνοριακή συνθήκη η οποία αναλύεται στη συνέχεια.

2^η συνοριακή συνθήκη: πάνω στον τοίχο

Αντίθετα με τη ζώνη Rankine, πάνω στον τοίχο δεν είναι γνωστή ούτε η τιμή της συνάρτησης $X(\theta)$ ούτε καμία από τις παραγώγους της, καθώς η μεταβολή της μέσα στη ζώνη Boussinesq είναι το ζητούμενο της ανάλυσης. Πάνω στον τοίχο γνωρίζουμε μόνο την τιμή της κλίσης της συνολικής ώθησης που είναι ίση με $\tan \delta_w$. Επομένως η συνοριακή συνθήκη γράφεται στην ίδια μεικτή μορφή της εξίσωσης

$$\left. \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta} \right|_{\theta=\omega} = \frac{-2X'(\omega)}{6X(\omega) + f_r(\omega)} = \tan \delta_w \quad (4.60)$$

4.3.2.5 Διερεύνηση της συνοριακής συνθήκης που εκφράζει την κλίση της τάσης

Και στα δύο σύνορα του προβλήματος είδαμε ότι ισχύει η ίδια συνοριακή συνθήκη που έχει τη μορφή της Εξ. (4.60), η οποία μπορεί να γραφτεί στη γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής Εξ. (4.61)

$$X'(\theta) + 3 \tan \delta(\theta) X(\theta) = -\frac{1}{2} \tan \delta(\theta) f_r(\theta) \quad (4.61)$$

Η Εξ. (4.61) αντιπροσωπεύει ένα είδος μεικτής συνοριακής συνθήκης η οποία έχει πάρει το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Robin (1855 - 1897) και είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνθηκών Dirichlet και Neumann πάνω σε μια συνοριακή επιφάνεια S , η οποία έχει τη γενική μορφή (Gustafson, 1998):

$$a(s)\psi(s) + \beta(s) \frac{d\psi(s)}{dn} = f(s) \quad (4.63)$$

όπου $d\psi/dn$ η κάθετη παράγωγος στην επιφάνεια S και $a(s)$, $\beta(s)$ και $f(s)$ είναι είτε σταθερές είτε γνωστές συναρτήσεις. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και ως συνοριακές συνθήκες εμπέδησης λόγω της ευρείας εφαρμογής τους στη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οι τιμές των συντελεστών είναι γνωστές στα δύο άκρα. Στο σύνορο της Ζώνης Rankine η συγκεκριμένη συνθήκη είναι περιττή, καθώς είναι γνωστές οι συναρτήσεις X και X' . Είναι φανερό ότι πάνω στη διεπιφάνεια του τοίχου, όπου δεν είναι γνωστή ούτε η συνάρτηση ούτε η παραγωγός της, τη διαφορική Εξ. (4.61) μπορούν να την ικανοποιούν διαφορετικοί συνδυασμοί τιμών για τη X και τη X' .

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι αν ήταν γνωστή η συνάρτηση $\tan \delta(\theta)$, δηλαδή η μεταβολή του λόγου τ/σ μέσα στο ριπίδιο, τότε η διαφορική Εξ. (4.62) της συνοριακής συνθήκης θα μπορούσε να δώσει απευθείας τις τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$, κάτι που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία και με τη σχετική παρατήρηση του Caquot (1934). Η επίλυση μπορεί να γίνει είτε αριθμητικά, είτε ημιαναλυτικά ως εξής:

Αν θεωρηθεί σταθερή η κλίση δ , τότε η γραμμική διαφορική εξίσωση σταθερών συντελεστών ολοκληρώνεται εύκολα μέσω του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{3 \tan \delta \theta}$ όπως δείχνουν οι Εξ. (4.64) και (4.65):

$$\frac{d}{d\theta} \left(e^{3 \tan \delta \theta} X(\theta) \right) = -\frac{1}{2} \tan \delta e^{3 \tan \delta \theta} f_r(\theta) = 0 \quad (4.64)$$

$$X(\theta) = e^{-3 \tan \delta \theta} \left[-\frac{1}{2} \tan \delta \int e^{3 \tan \delta \theta} f_r(\theta) d\theta + C \right] \quad (4.65)$$

Με αντικατάσταση του $f_r(\theta)$ από την Εξ. (4.37α) και ολοκλήρωση προκύπτει

$$X(\theta) = -\frac{1}{2} \tan \delta \left[\frac{3 \tan \delta \cos(\theta + \psi_e) + \sin(\theta + \psi_e)}{(1 + 9 \tan^2 \delta) \cos \psi_e} \right] + C e^{-3 \tan \delta \theta} \quad (4.66)$$

Η σταθερά της ολοκλήρωσης C προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες, έχοντας γνωστή την τιμή $X(\theta_0)$ στο θ_0 , οπότε προκύπτει η Εξ. (4.67). Οι εξισώσεις αυτές μοιάζουν με τις σταθερές ολοκλήρωσης που υπολόγισε και ο Azarou (1975), αλλά και με την Εξ. (2.39 – Κεφάλαιο 2), η οποία δίνει τη ροπή του εδαφικού πρίσματος που ορίζεται από τη λογαριθμική σπείρα (αν χρησιμοποιηθεί η γωνία φ αντί της δ). Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, αφενός διότι η συνάρτηση δυναμικού των τάσεων έχει διαστάσεις ροπής και αφετέρου η χρήση σταθερής κλίσης δ πάνω σε κάθε ακτινική διεύθυνση θ παραπέμπει άμεσα στο ριπίδιο του Prandtl, με τις ευθύγραμμες ακτινικές χαρακτηριστικές πάνω στις οποίες η κλίση ισούται πάντοτε με φ .

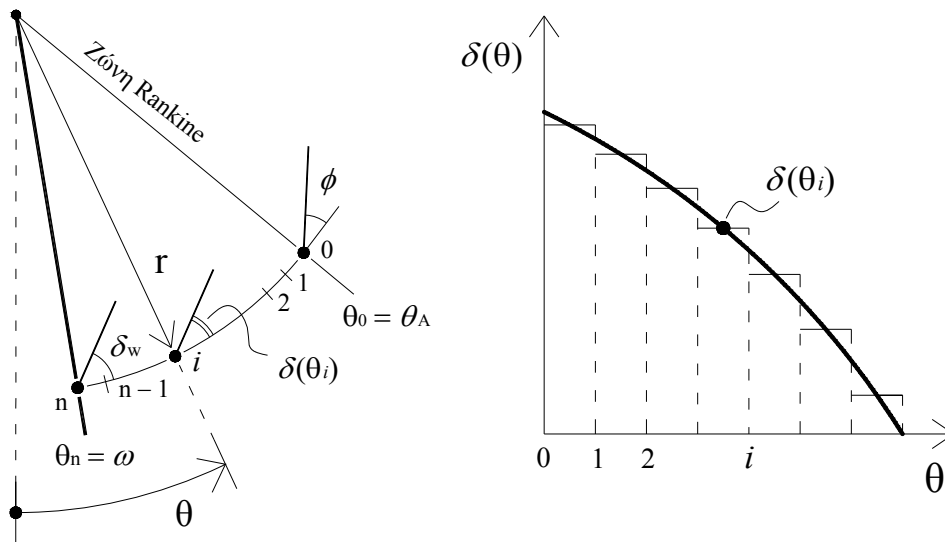
$$C = \left[X(\theta_0) + \frac{1}{2} \tan \delta \left[\frac{3 \tan \delta \cos(\theta_0 + \psi_e) + \sin(\theta_0 + \psi_e)}{(1 + 9 \tan^2 \delta) \cos \psi_e} \right] \right] e^{3 \tan \delta \theta_0} \quad (4.67)$$

Συνολικά η συνάρτηση $X(\theta)$ γίνεται:

$$X(\theta) = \frac{\tan \delta}{2(1 + 9 \tan^2 \delta) \cos \psi_e} \left[3 \tan \delta \left(\cos(\theta_0 + \psi_e) e^{\tan \delta(\theta_0 - \theta)} - \cos(\theta + \psi_e) \right) + \right. \\ \left. + \sin(\theta_0 + \psi_e) e^{\tan \delta(\theta_0 - \theta)} - \sin(\theta + \psi_e) \right] + X(\theta_0) e^{\tan \delta(\theta_0 - \theta)} \quad (4.67\beta)$$

Η παραπάνω λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια προσεγγιστική, βηματική διαδικασία, η οποία αναπαριστάται στο Σχ. 4.11, και περιλαμβάνει διακριτοποίηση της ζώνης Boussinesq σε n τμήματα, μέσα στα οποία η κλίση $\delta(\theta_i)$ θεωρείται σταθερή. Όπως είναι αναμενόμενο, η ακρίβεια της κλιμακωτής προσέγγισης της πραγματικής συνάρτησης

$\delta(\theta)$ που φαίνεται στο Σχ. 4.11β βελτιώνεται με την αύξηση των σημείων διακριτοποίησης. Επίσης, σε κάθε βήμα πρέπει να υπολογίζεται εκ νέου η τιμή της σταθεράς C συναρτήσει της προηγούμενης τιμής της $X(\theta)$ και της νέας τιμής $\delta(\theta_i)$.



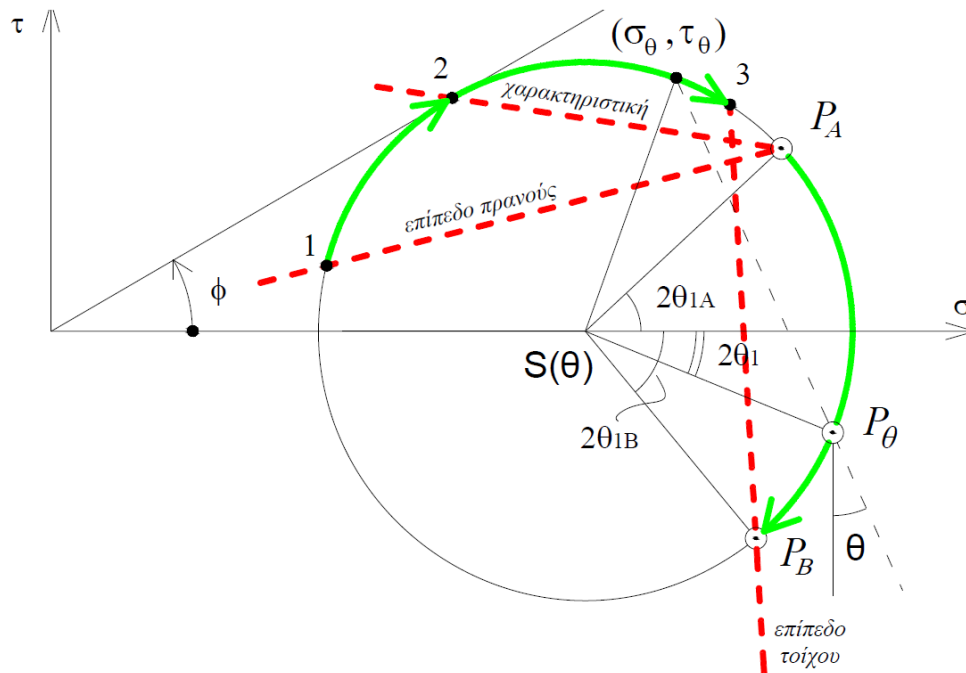
Σχήμα 4.11 Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με βηματικά σταθερή τιμή της κλίσης $\delta(\theta)$

Η παραπάνω διαδικασία προϋποθέτει γνώση της συνάρτησης $\delta(\theta)$, η οποία όπως φαίνεται και από τη σχηματική αναπαράσταση του κύκλου Mohr (Σχ. 4.12), είναι ουσιαστικά συνάρτηση της άγνωστης κλίσης θ_1 του μέγιστου κύριου επιπέδου και σε κάθε τιμή της θ , δίνεται από την Εξ. (4.68). Η κλίση αυτή είναι γνωστή και σταθερή, ίση με θ_{1A} μέσα σε ολόκληρη τη Ζώνη Rankine (όσο το θ περιστρέφεται από το σημείο 1 έως το σημείο 2 του Σχήματος). Επίσης είναι γνωστή η τιμή της ακριβώς πάνω στον τοίχο (σημείο 3 του Σχήματος) και ίση με $\theta_{1B} = (\Delta_2 + \delta_w - 2\omega) / 2$

$$\tan \delta(\theta) = \frac{\sin \varphi \sin[2(\theta - \theta_1)]}{1 + \sin \varphi \cos[2(\theta - \theta_1)]} \tag{4.68}$$

Για τις ενδιάμεσες τιμές του θ , δηλαδή για τα επίπεδα που παρεμβάλλονται μεταξύ των σημείων 2 και 3, ο πόλος του κύκλου μετατοπίζεται σταδιακά, κατά άγνωστο τρόπο, από τη θέση P_A στη θέση P_B . Σημειώνεται εδώ ότι καταχρηστικά απεικονίζονται οι σχετικές θέσεις των σημείων και οι προσανατολισμοί των επιπέδων πάνω στον ίδιο κύκλο, καθώς μεταξύ των σημείων 2 και 3 το κέντρο του κύκλου S , μετατοπίζεται βάσει μιας επίσης άγνωστης συνάρτησης του θ . Ξαναβρίσκουμε επομένως με αυτόν τον τρόπο τις δύο

βασικές παραμέτρους που ορίζουν το πρόβλημα στη μέθοδο των χαρακτηριστικών ή μέσω του συστήματος των Εξ. (4.27).



Σχήμα 4.12 Μεταβολή των κύριων επιπέδων και της κλίσης $\tau_\theta/\sigma_\theta$ στη ζώνη Boussinesq

4.3.3 Μετατροπή της συνήθους διαφορικής εξίσωση σε γραμμικοποιημένη μορφή

4.3.3.1 Γραμμικοποίηση κατά Azarou (1975)

Η συνήθης διαφορική εξίσωση της τασικής συνάρτησης στη μη γραμμική μορφή της Εξ. (4.46) παρουσιάζει σημαντικά μειονεκτήματα που έχουν να κάνουν τόσο με την περαιτέρω θεωρητική επεξεργασία της, όσο και ως προς την αριθμητική επίλυση, τα οποία θα σχολιαστούν και στη συνέχεια. Για τους λόγους αυτούς αναζητήθηκε μια πιο ομαλή, γραμμικοποιημένη μορφή για τη διαφορική εξίσωση, η οποία βασίστηκε στην αναδιατύπωση του ίδιου του κριτηρίου Mohr – Coulomb (Azarou, 1975).

Αν η Εξ. (4.39) επιλυθεί ως τριώνυμο θεωρώντας ως άγνωστη τη συνάρτηση σ_r καταλήγει σε μια σχέση αναλογίας μεταξύ των τάσεων σ_r και σ_θ στην αστοχία, που δίνεται από την Εξ. (4.69)

$$\sigma_r/\sigma_\theta = Q(\theta) = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \mp \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\tan \varphi} \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta} \right)^2} \tag{4.69}$$

Ο αδιάστατος συντελεστής $Q(\theta)$ είναι ουσιαστικά μονοσήμαντη συνάρτηση του γνωστού λόγου $\tau_{\theta}/\sigma_{\theta} = \tan\delta(\theta)$ όπως είχε παρατηρήσει και ο Caquot, ο οποίος κατέληξε στην ίδια έκφραση μετασχηματίζοντας με τριγωνομετρικές ταυτότητες την αρχική γεωμετρική σχέση από τον κύκλο Mohr, μέσω μιας πολύ πιο βασανιστικής διαδικασίας (Annex C - Absi, 1984).

Το υπόριζο της Εξ. (4.69) παίρνει τιμές από 0 έως 1 που αντιστοιχούν στη μετάβαση των τάσεων από τα κύρια επίπεδα μέχρι τις χαρακτηριστικές. Πράγματι, για $\tau_{\theta}/\sigma_{\theta} = 0$ (κύρια επίπεδα), η εξίσωση δίνει τους γνωστούς συντελεστές Rankine $(1 \mp \sin \varphi)/(1 \pm \sin \varphi)$, ενώ για $\tau_{\theta}/\sigma_{\theta} = \tan \varphi$ το υπόριζο μηδενίζεται και απομένει στην εξίσωση μόνο ο πρώτος όρος που εκφράζει το λόγο ακτινικής προς εφαπτομενικής τάσης πάνω στη χαρακτηριστική. Τα διπλά πρόσημα στο δεύτερο όρο απλώς δηλώνουν αν η μετάβαση γίνεται προς το μέγιστο ή προς το ελάχιστο κύριο επίπεδο. Για παράδειγμα, στο παθητικό πρόβλημα Boussinesq, πρέπει να χρησιμοποιηθεί το αρνητικό πρόσημο για τη μετάβαση από τη χαρακτηριστική μέχρι τον τοίχο.

Σε ακόμα πιο συνεπτυγμένη διατύπωση, η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή της Εξ. (4.70), στην οποία εισάγεται μια βοηθητική συνάρτηση $f(\theta) = \tan \delta(\theta)/\tan \varphi$

$$Q(\theta) = 1 + 2 \tan^2 \varphi \mp 2 \tan \varphi \sqrt{1 - f(\theta)^2} / \cos \varphi \quad (4.70)$$

Αν αντικατασταθούν οι Εξ. (4.45) στη γραμμικοποιημένη μορφή του κριτηρίου (Εξ. 4.69), καταλήγουμε στη δευτεροβάθμια συνήθη διαφορική εξίσωση

$$X''(\theta) - 3[2Q(\theta) - 1]X(\theta) - f_r(\theta)[Q(\theta) - 1] = 0 \quad (4.71)$$

Η Εξ. (4.71) είναι ουσιαστικά μη-γραμμική, καθώς η μη-γραμμικότητα παραμένει «κρυμμένη» στον αδιάστατο συντελεστή $Q(\theta)$, λόγω της παρουσίας του όρου $\tau_{\theta}/\sigma_{\theta}$, ο οποίος εξαρτάται από την άγνωστη συνάρτηση X . Όμως η συγκεκριμένη γραμμικόμορφη εξίσωση, επιτρέπει εναλλακτικούς χειρισμούς του προβλήματος βάσει καθιερωμένων τεχνικών ολοκλήρωσης.

4.3.3.2 Ακριβής επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για σταθερή κλίση $\delta(\theta)$

Αν υποτεθεί, όπως και προηγουμένως σταθερή η κλίση δ , άρα και η ποσότητα Q , η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ως λύση την Εξ. (4.72), η οποία προκύπτει ως άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και της μερικής λύσης

$$X(\theta) = C_1 e^{+\sqrt{3(2Q-1)} \theta} + C_2 e^{-\sqrt{3(2Q-1)} \theta} - \frac{Q-1}{3(2Q-1)+1} f_r(\theta) \quad (4.72)$$

Οι σταθερές C_1 και C_2 υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος αρχικών συνθηκών στο $\theta=\theta_0$ που δίνεται από τις Εξ. (4.73), και οι αναλυτικές τους εκφράσεις παρουσιάζονται στις Εξ. (4.74) και (4.75), στις οποίες για λόγους συντομίας τα σύμβολα $s = 3(2Q-1)$, $q = Q-1$

$$X(\theta_0) = X_0 \text{ και } -2X'(\theta_0) = \tan \delta [6X_0 + f_r(\theta_0)] \quad (4.73)$$

$$C_1 = \frac{e^{-\sqrt{s} \theta_0} \left[2 \left[X_0 (s+1) (\sqrt{s} - 3 \tan \delta) - q f_r'(\theta_0) \right] - f_r(\theta_0) \left[(s+1) \tan \delta - 2\sqrt{s}q \right] \right]}{4\sqrt{s} (s+1)} \quad (4.74)$$

$$C_2 = \frac{e^{\sqrt{s} \theta_0} \left[2 \left[X_0 (s+1) (\sqrt{s} + 3 \tan \delta) + q f_r'(\theta_0) \right] + f_r(\theta_0) \left[(s+1) \tan \delta + 2\sqrt{s}q \right] \right]}{4\sqrt{s} (s+1)} \quad (4.75)$$

Η παραπάνω αναλυτική λύση μπορεί να χρησιμεύσει για μια βηματική υπολογιστική διαδικασία για τμηματικά σταθερό δ , αντίστοιχη με αυτήν που παρουσιάστηκε για τη διαφορική εξίσωση της παραγράφου 4.3.2.5 (Εξ. 4.66), για την οποία είδαμε ότι μπορεί να προβλέψει τις τιμές του $X(\theta)$ ανάλογα με οποιαδήποτε τιμή $\delta(\theta)$ εισάγεται σε αυτήν. Η ειδοποιός διαφορά είναι ότι τώρα δεν παράγονται απλώς τυχαίες τιμές του $X(\theta)$, αλλά τιμές που ικανοποιούν το κριτήριο αστοχίας. Αυτό το πλεονέκτημα θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενη ενότητα για την εφαρμογή μιας επαναληπτικής διαδικασίας σύγκλισης με διαδοχικές προσεγγίσεις της ακριβούς συνάρτησης $\delta(\theta)$.

4.4 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΛΥΣΕΩΝ

4.4.1 Διακριτοποίηση ζώνης Boussinesq και επίλυση με πεπερασμένες διαφορές

Η συνήθης διαφορική εξίσωση του προβλήματος, στη μορφή της ενότητας 4.3.2 ή στη μορφή της ενότητας 4.3.3 μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μορφοποίησης σε σχέση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών είναι ότι διακριτοποιείται μόνο ένα τόξο (κατά μήκος της μεταβλητής θ , για σταθερό r) και όχι ολόκληρος ο χώρος με διδιάστατο κάναβο (Δημητρακόπουλος, 2011).

Με τη μέθοδο αυτή, η γωνία της ζώνης Boussinesq που είναι ίση με $\theta_A - \omega$ χωρίζεται σε n τμήματα, στα άκρα των οποίων θ_i ζητούνται οι άγνωστες τιμές της συνάρτησης $X(\theta_i)$. Οι τρεις εξισώσεις παρέχονται από τις συνοριακές συνθήκες (δύο στη Ζώνη Rankine και μία πάνω στον τοίχο), ενώ οι υπόλοιπες που συμπληρώνουν το $n \times n$ σύστημα από την εφαρμογή της διαφορικής εξίσωσης σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο. Το $n \times n$ μη-γραμμικό σύστημα που προκύπτει επιλύθηκε με την κλασική αριθμητική μέθοδο Newton.

4.4.1.1 Αριθμητική μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton είναι η πιο γνωστή και διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων που αναπτύχθηκε από το θεμελιωτή του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού Isaac Newton (1643-1727). Δοθείσης μιας προσέγγισης $x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ της λύσης $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ του συστήματος $F(x) = 0$, η μέθοδος Newton υπολογίζει την επόμενη προσέγγιση σύμφωνα με την επαναληπτική μορφή

$$x^{p+1} = x^p - F'(x^p)^{-1} F(x^p), \quad p = 0, 1, \dots \quad (4.76)$$

όπου $F'(x^p)$ είναι ο Ιακωβιανός Πίνακας, διαστάσεων $n \times n$, της F για το διάνυσμα x^p . Με χρήση του επαναληπτικού τύπου (4.76) εύκολα καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα (4.77), η λύση του οποίου δίνει τη διόρθωση Newton $s^p = x^{p+1} - x^p$

$$F'(x^p)s^p = -F(x^p) \quad (4.77)$$

Επομένως, η επόμενη προσέγγιση δίνεται από τη σχέση $x^{p+1} = x^p + s^p$ και επαναλαμβάνεται νέος κύκλος επίλυσης, με εκ νέου υπολογισμό των μητρώων $F(x^{p+1})$ και $F'(x^{p+1})$. Το πλεονέκτημα της μεθόδου Newton έναντι εναλλακτικών τεχνικών επίλυσης είναι ότι συγκλίνει τετραγωνικά δοθείσης μιας καλής αρχικής εκτίμησης της λύσης (Kelley, 1995). Τετραγωνική σύγκλιση σημαίνει ότι το σφάλμα μιας επανάληψης είναι της τάξεως του τετραγώνου του σφάλματος της προηγούμενης επανάληψης. Είναι λοιπόν μια τοπική επαναληπτική μέθοδος. Ωστόσο αν δε δοθεί μια καλή αρχική προσέγγιση της λύσης, η μέθοδος μπορεί να μη συγκλίνει καθόλου.

Η προσεγγιστική συνάρτηση $X^*(\theta)$ η οποία χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα ανάλυση (Εξ. 4.78) προκύπτει από μετατροπή της αντίστοιχης συνάρτησης που ισχύει για τη ζώνη Rankine (Εξ. 4.57) με τη χρήση αυθαίρετων, πλην όμως εύλογων προσεγγιστικών συναρτήσεων για τη μεταβολή του κέντρου του κύκλου $S(\theta)$ και της κλίσης θ_l που παρουσιάστηκαν στο Σχ. 4.16. Συγκεκριμένα, για την $S(\theta)$ θεωρείται ότι προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του κέντρου του κύκλου στη ζώνη Rankine S_A με μια εκθετικού τύπου συνάρτησης $g(\theta)$, όπως φαίνεται στην Εξ. (4.79), η οποία έχει ήδη αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 2 ότι αποτελεί καλή προσέγγιση της ζητούμενης λύσης. Όσο για τη γωνία θ_l , επιλέγεται μια σχέση με τη μορφή της (Εξ. 4.80) η οποία ορίζει το ρυθμό με την οποία περιστρέφονται τα κύρια επίπεδα μεταξύ των δύο γνωστών συνοριακών συνθηκών τους.

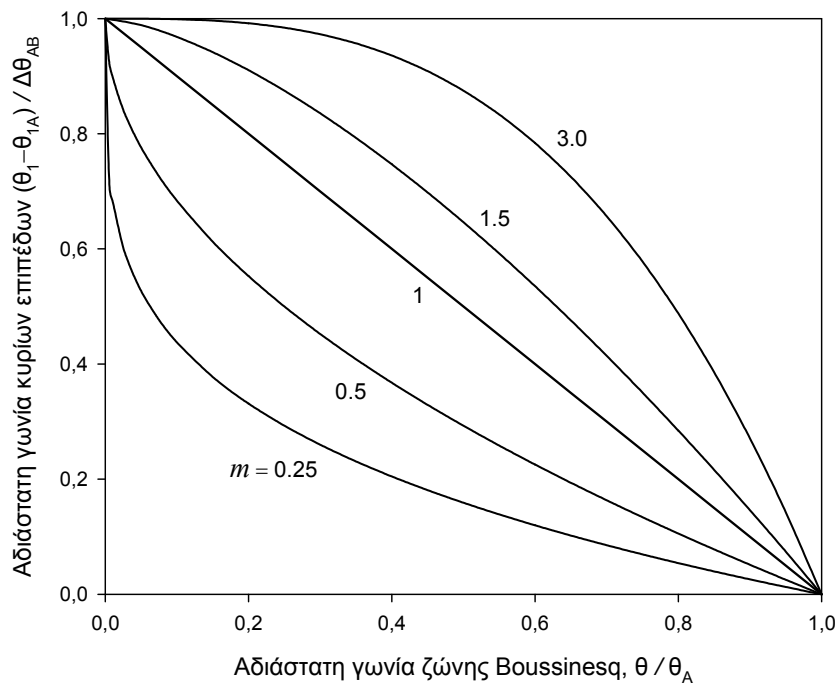
$$X^*(\theta) \approx \frac{1}{6} \left(g(\theta) \cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{[1 + \sin \varphi \cos[2\theta - 2\theta_l(\theta)]]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} - \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right) \quad (4.78)$$

$$S(\theta) = S_A g(\theta) = S_A e^{\Delta\theta_{AB}(\theta_A - \theta)\tan \varphi} \quad (4.79)$$

$$\theta_l(\theta) = \theta_{lA} - \Delta\theta_{AB} \left(\frac{\theta_A - \theta}{\theta_A - \omega} \right)^m \quad (4.80)$$

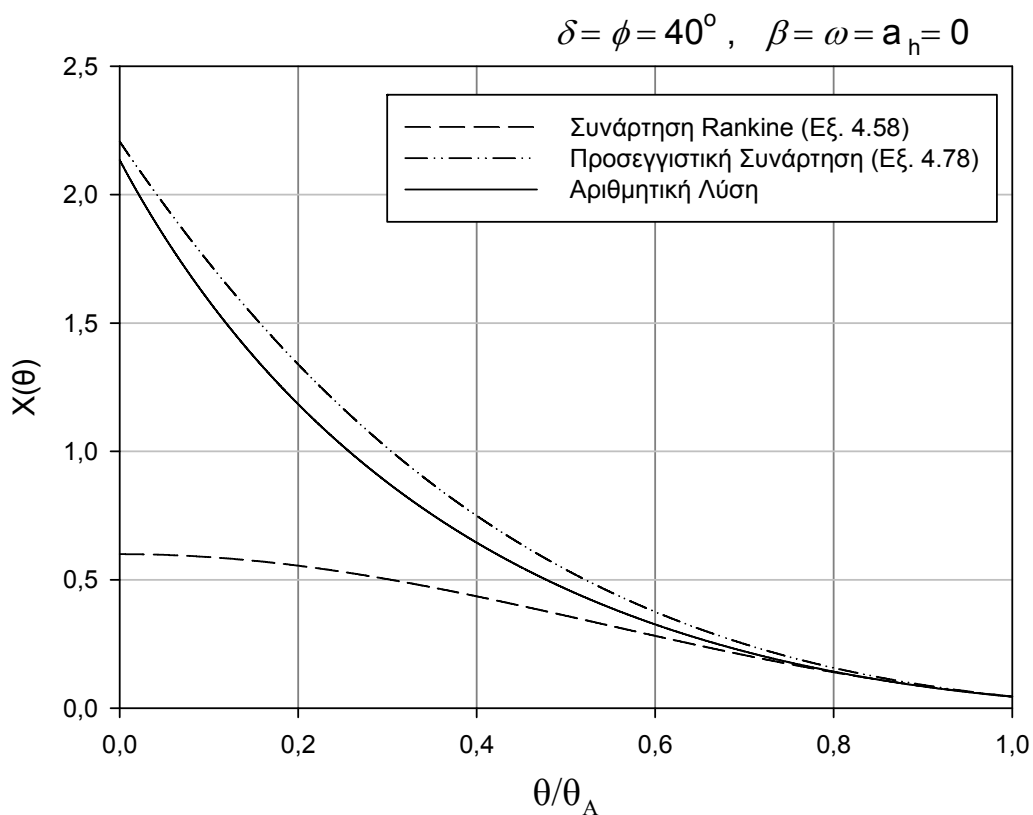
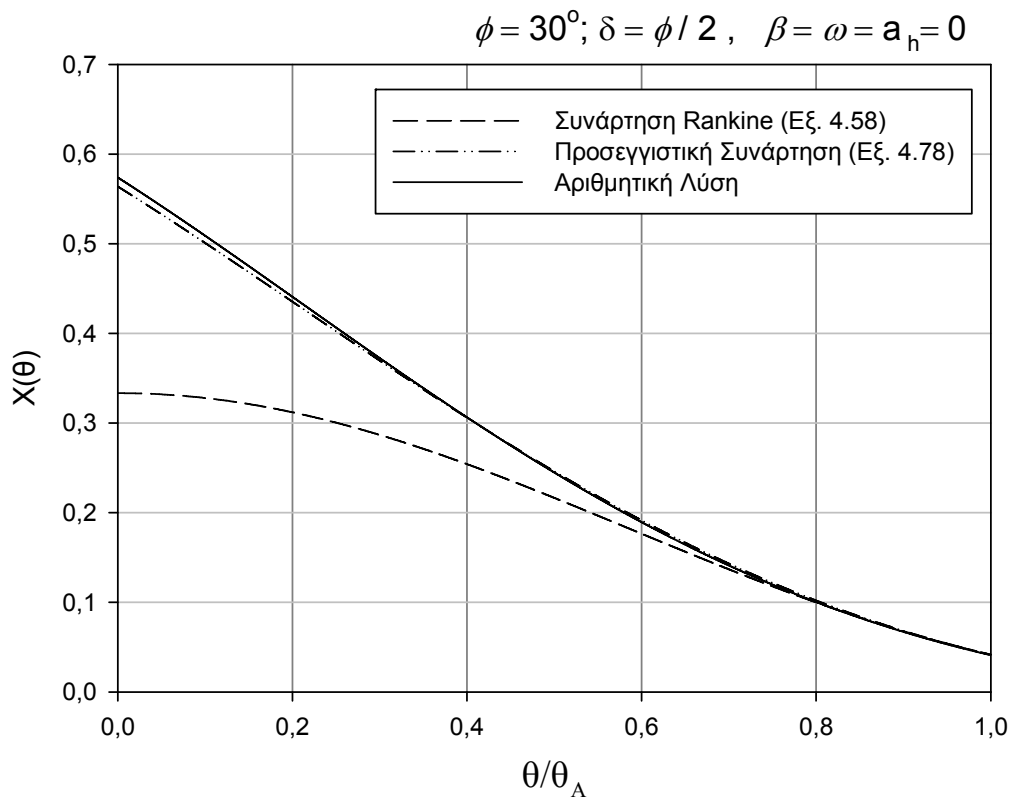
Τυπικές μορφές της συνάρτησης θ_l σαν συνάρτηση των τιμών που προκύπτουν για διάφορες τιμές του εκθέτη m , παρουσιάζονται στο Σχ. 4.13. Η απλή γραμμική κατανομή ($m=1$) είναι ικανοποιητική για όλες τις περιπτώσεις εκτός της $\delta_w = \varphi$, στην οποία δίνει πάντοτε $\delta(\theta) = \varphi$. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιείται μη-

γραμμική κατανομή, με $1/2 < m < 1$). Στο Σχ. 4.14 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα για τη συμπεριφορά της προσεγγιστικής συνάρτησης $X^*(\theta)$ μέσα στη ζώνη διακριτοποίησης, σε σύγκριση με την τασική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην κατάσταση Rankine και την ακριβή τασική συνάρτηση, όπως προέκυψε από τις αριθμητικές αναλύσεις. Και τα δύο παραδείγματα αντιστοιχούν στην παθητική κατάσταση.



Σχήμα 4.13 Συναρτήσεις σχήματος για τη γωνία θ_1 για διάφορες τιμές του εκθέτη m

Όπως παρατηρείται, η προσεγγιστική συνάρτηση ακολουθεί τη μορφή και βρίσκεται κοντά στην πραγματική συνάρτηση, όπως αυτή υπολογίζεται με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα, γεγονός που διευκολύνει τη σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου. Επίσης παρατηρείται ότι η προσεγγιστική συνάρτηση έχει ουσιαδώς διαφορετική μορφή από τη λύση Rankine για το ομοιόμορφο πεδίο τάσεων. Η συνάρτηση Rankine δεν θα μπορούσε να αποτελεί αρχική προσέγγιση της σωστής λύσης για τη μέθοδο Newton, όχι μόνο γιατί είναι αρκετά μακριά από τη σωστή μορφή, αλλά κυρίως γιατί αποτελεί και η ίδια λύση της διαφορικής εξίσωσης (κριτήριο Mohr Coulomb) η οποία απλώς δεν ικανοποιεί τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη πάνω στον τοίχο. Η χρήση των τιμών που αντιστοιχούν στη λύση Rankine θα μηδενίσει όλες τις εσωτερικές εξισώσεις του συστήματος, $F(x^p) = 0$ και επομένως θα οδηγήσει σε αστάθεια την ίδια την αριθμητική μέθοδο.



Σχήμα 4.14 Έλεγχος συμπεριφοράς της προσεγγιστικής συνάρτησης σε σχέση με την πραγματική και με τη συνάρτηση Rankine για δύο τυπικές περιπτώσεις

4.4.1.2 Επίλυση στην αρχική μορφή της Εξ. 4.46

Για όλες τις εξισώσεις επιλέγονται πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης. Κατ' αρχάς για τη συνοριακή συνθήκη στον τοίχο που δίνεται από την Εξ. (4.81), η πρώτη παράγωγος γράφεται στη μορφή της Εξ. (4.82) με πρόσω διαφορές, αφού εφαρμόζεται στο πρώτο σημείο της ζώνης Boussinesq

$$X'(\omega) + 3 \tan \delta_w X(\omega) + \frac{1}{2} \tan \delta_w f_r(\omega) = 0 \tag{4.81}$$

$$X'_1 = \frac{-3X_1 + 4X_2 - X_3}{2d\theta} \tag{4.82}$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.82) στην Εξ. (4.81) προκύπτει η πρώτη εξίσωση του συστήματος

$$3(2d\theta \tan \delta - 1)X_1 + 4X_2 - X_3 + \frac{\cos(\omega + \psi_e)}{\cos \psi_e} d\theta \tan \delta = 0 \tag{4.83}$$

Για τις συνοριακές συνθήκες στο $\theta = \theta_A$ (ζώνη Rankine), γνωρίζουμε αφενός την τιμή της συνάρτησης $X(\theta)$, άρα $X_n = X(\theta_A)_{\text{Rankine}}$ από την Εξ. (4.57), αλλά και την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της $X(\theta)$ με παραγωγή της Εξ. (4.57). Για τις παραγώγους αυτές εφαρμόζονται πίσω διαφορές, καθώς οι παράγωγοι αφορούν το τελευταίο σημείο της ζώνης Boussinesq (Εξ. 4.84 και 4.85)

$$X'_n = \frac{3X_n - 4X_{n-1} + X_{n-2}}{2d\theta} \tag{4.84}$$

$$X''_n = \frac{2X_n - 5X_{n-1} + 4X_{n-2} - X_{n-3}}{d\theta^2} \tag{4.85}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων οι δύο τελευταίες εξισώσεις του συστήματος παίρνουν τη μορφή των Εξ. (4.86) και (4.87)

$$3X_n - 4X_{n-1} + X_{n-2} - 2d\theta X'(\theta_A)_{Rankine} = 0 \quad (4.86)$$

$$2X_n - 5X_{n-1} + 4X_{n-2} - X_{n-3} - d\theta^2 X''(\theta_A)_{Rankine} = 0 \quad (4.87)$$

Οι ενδιάμεσες εξισώσεις του συστήματος δίνονται από την αντικατάσταση με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές των παραγώγων της διαφορικής Εξ. (4.46), σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο. Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος σε κεντρικές διαφορές δίνονται από τις σχέσεις

$$X'_i = \frac{-X_{i-1} + X_{i+1}}{2d\theta} \quad \text{και} \quad X''_i = \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{d\theta^2} \quad (4.88)$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (4.88) στην Εξ. (4.46) σε κάθε κόμβο $i = 2$ ως $n-3$, οι αντίστοιχες εξισώσεις γράφονται

$$16 \left(\frac{-X_{i-1} + X_{i+1}}{2d\theta} \right)^2 + \left[-3X_i + \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{d\theta^2} \right]^2 - \sin^2 \varphi \left[9X_i + \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{d\theta^2} + 2 \frac{\cos(\omega + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right]^2 = 0 \quad (4.89)$$

Η λύση του αριθμητικού συστήματος που προκύπτει γίνεται όπως έχει ήδη αναφερθεί με τη μέθοδο Newton.

4.4.1.3 Επίλυση στη γραμμικοποιημένη μορφή της Εξ. (4.71)

Κατ' αρχάς οι εξισώσεις που αφορούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος παραμένουν ακριβώς ίδιες, καθώς η γραμμικοποίηση αφορά μόνο τη διαφορική εξίσωση, στην οποία εφαρμόζονται οι ίδιες κεντρικές πεπερασμένες διαφορές όπως προηγουμένως και η εξίσωση παίρνει την απλή μορφή της Εξ. (4.90), στην οποία η πολυπλοκότητα/μη-γραμμικότητα βρίσκεται στην έκφραση του $Q(\theta)$ που δίνεται από την Εξ. (4.91)

$$\frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{d\theta^2} - 3[2Q(\theta) - 1]X_i - \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} [Q(\theta) - 1] = 0 \quad (4.90)$$

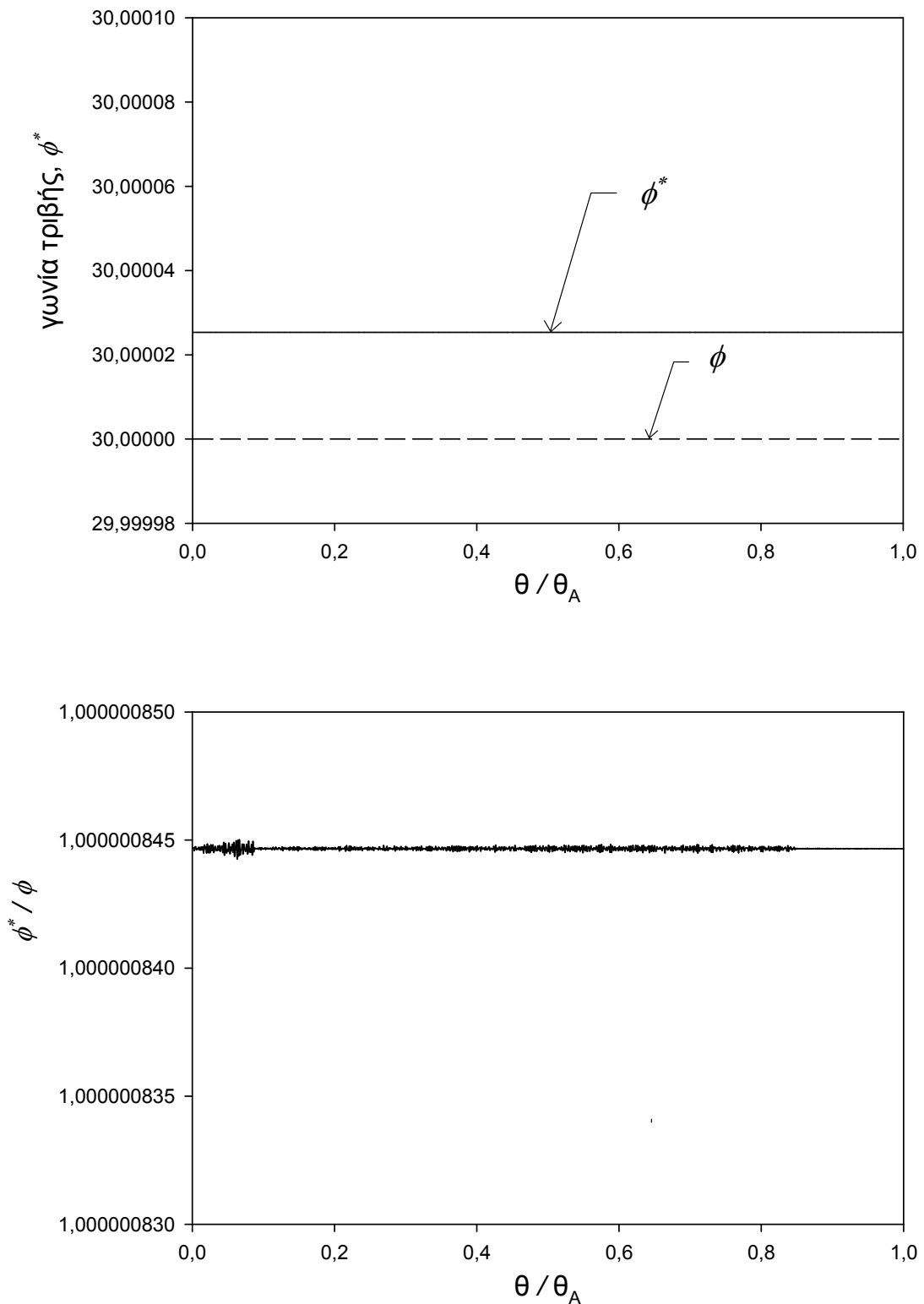
$$Q(\theta) = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} - \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \left[1 - \left[\frac{\left(\frac{X_{i-1} - X_{i+1}}{d\theta} \right)}{\left(6X_i + \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right) \tan \varphi} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.91)$$

4.4.1.4 Ακρίβεια και ευστάθεια της αριθμητικής λύσης

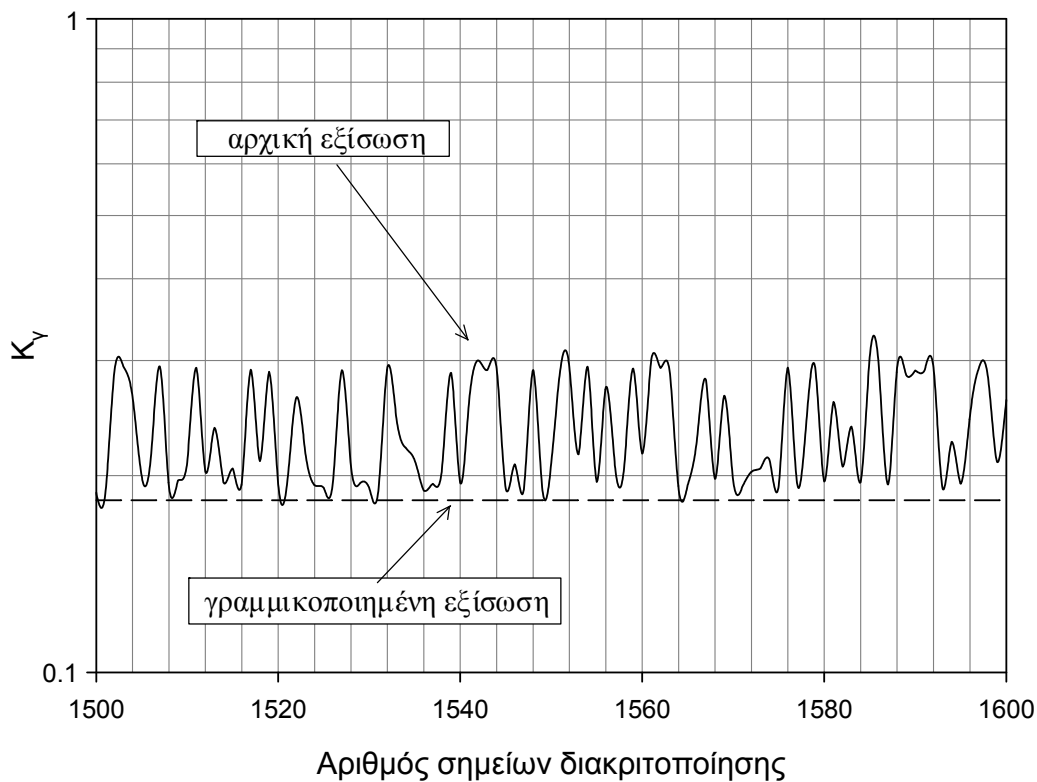
Η αριθμητική ανάλυση εφαρμόστηκε με την υπόθεση ότι το κριτήριο αστοχίας ικανοποιείται παντού στο εδαφικό μέσο. Ένα καλό κριτήριο ποιότητας της αριθμητικής μεθόδου είναι η διερεύνηση της ικανοποίησης του κριτηρίου αστοχίας βάσει των αποτελεμάτων. Αυτό γίνεται μέσω του αντίστροφου υπολογισμού του $\sin \varphi$ από την Εξ. (4.46), βάσει των υπολογισμένων τιμών της $X(\theta)$. Είναι ακριβώς ο ίδιος έλεγχος που χρησιμοποίησε ο Boussinesq στο ιστορικό άρθρο του 1876 (βλ. Εξ. 4.13).

Η γωνία φ που προκύπτει καλείται φ^* και έχει εν γένει διαφορετική τιμή από την πραγματική γωνία τριβής καθώς εμπεριέχει σφάλμα. Η τάξη της διαφοροποίησης αυτής αποτελεί το κριτήριο αξιοπιστίας της μεθόδου. Επίσης το επιθυμητό είναι το φ^* να μην ξεπερνά το φ ώστε το σφάλμα να λειτουργεί υπέρ της ασφαλείας. Στο Σχ. 4.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραπάνω διερεύνησης για το τυχαίο παράδειγμα σε παθητικές συνθήκες με $\varphi = \delta = 30^\circ$, $\beta = \varphi/2$, $\omega = 0$, $a_h = 0.3$. Στα διαγράμματα φαίνεται πως το κριτήριο αστοχίας παραβιάζεται μεν, η παραβίαση αυτή όμως είναι αμελητέα, καθώς είναι της τάξης του 10^{-6} . Έτσι, μπορεί κανείς να ισχυριστεί πως η αριθμητική λύση δεν είναι ακριβής για την τιμή $\varphi = 30^\circ$ αλλά είναι για $\varphi = 30.0001^\circ$, σφάλμα δηλαδή αμελητέο, κατά πολύ μικρότερο από τα περιθώρια της αβεβαιότητας που υπάρχουν στον προσδιορισμό των παραμέτρων της μηχανικής αντοχής ενός εδαφικού υλικού, όπως είναι η γωνία τριβής.

Τέλος, στο Σχ. 4.16 παρουσιάζεται ένας έλεγχος ευστάθειας των αριθμητικών αναλύσεων, ο οποίος δείχνει ότι η συμπεριφορά της γραμμικοποιημένης συνάρτησης είναι σταθερή και ανεξάρτητη του αριθμού των σημείων διακριτοποίησης. Αντίθετα, η πρώτη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που έχει υψωμένους τους όρους στο τετράγωνο παρουσιάζει αστάθεια και έντονες διακυμάνσεις με την αύξηση των σημείων διακριτοποίησης, συμπεριφορά που πιθανώς σχετίζεται με τον νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων. Το παράδειγμα του σχήματος έχει προκύψει για την απλή περίπτωση οριζόντιου πρανούς και κατακόρυφου τοίχου αντιστήριξης, χωρίς σεισμό, για γωνία τριβής $\varphi = 45^\circ$ και απόλυτα τραχύ τοίχου $\delta = \varphi$ και ενεργητικές συνθήκες.



Σχήμα 4.15 Έλεγχος ακρίβειας των αριθμητικών αναλύσεων μέσω αντίστροφου υπολογισμού από το κριτήριο αστοχίας



Σχήμα 4.16 Έλεγχος ευστάθειας της αριθμητικής λύσης για την αρχική και τη γραμμικοποιημένη διαφορική εξίσωσης

4.4.2 Επίλυση με επαναληπτική μέθοδο σύγκλισης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια εναλλακτική μέθοδος αριθμητικής επίλυσης, η οποία δεν απαιτεί λύση μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων, ούτε αρχική εκτίμηση για τη συνάρτηση $X(\theta)$, αλλά βασίζεται στην ικανότητα της γραμμικοποιημένης διαφορικής Εξ. (4.71) να συγκλίνει στη σωστή λύση με διαδοχικές προσεγγίσεις για τη συνάρτηση της κλίσης της ώθησης πάνω σε κάθε επίπεδο, η οποία περιγράφεται με τη βοηθητική συνάρτηση $f(\theta) = \tan \delta(\theta) / \tan \varphi$. Για δεδομένες τιμές της συνάρτησης f , η ποσότητα $Q(\theta)$ (Εξ. 4.71) είναι πλέον γνωστή και η διαφορική εξίσωση μπορεί τμηματικά να επιλυθεί ως γραμμική με σταθερούς συντελεστές.

Η επαναληπτική διαδικασία βασίζεται στην επιλογή μιας αρχικής τυχαίας συνάρτησης για τη μεταβολή του $\delta(\theta)$, η οποία οφείλει απλώς να ικανοποιεί τις δύο συνοριακές συνθήκες: $\delta(\theta) = \delta_w$ στο $\theta = \omega$ και $\delta(\theta) = \varphi$ στο $\theta = \theta_A$. Για τη συνάρτηση αυτή υπολογίζονται οι ποσότητες f και Q και στη συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές της

συνάρτησης X πάνω στους κόμβους που διακριτοποιούν τη ζώνη Boussinesq. Ο υπολογισμός των X_i μπορεί να γίνει είτε λύνοντας ένα γραμμικό πλέον σύστημα πεπερασμένων διαφορών, είτε εναλλακτικά με χρήση των κλειστών αναλυτικών εκφράσεων της παραγράφου 4.3.3.2. Στη συνέχεια υπολογίζονται αντίστροφα οι τιμές της συνάρτησης κλίσης f_{ci} που προκύπτουν από τις τιμές των X_i . Η νέα προσέγγιση της συνάρτησης f^{k+1} με την οποία επαναλαμβάνεται η διαδικασία, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (ανισοβαρής μέσος όρος) της προηγούμενης τιμής της f^k και της υπολογισμένης f_c , όπως δείχνει η Εξ. (4.92).

$$f_i^{k+1} = w f_{ci}^k + (w-1) f_i^k \quad (4.92)$$

Για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει το μεγαλύτερο βάρος να δίνεται στην προηγούμενη προσέγγιση. Γενικά, γρηγορότερη σύγκλιση επιτυγχάνεται για τιμές του $w < 0.2$. Επίσης, σε κάθε βήμα επιβάλλονται πάντοτε στα άκρα οι συνοριακές συνθήκες της συνάρτησης f , αγνοώντας τις ενδεχομένως διαφορετικές τιμές που προκύπτουν από την ανάλυση. Η συνάρτηση f μπορεί να παρομοιαστεί με μια «αλυσίδα» που αναρτάται από δύο σταθερά σημεία και το σχήμα της εσωτερικά μεταβάλλεται, οδηγούμενο σταδιακά στις σωστές τιμές σε όλο το μήκος του τομέα. Η παραπάνω διαδικασία με τη μορφή διαγράμματος ροής απεικονίζεται στο Σχ. 4.17.

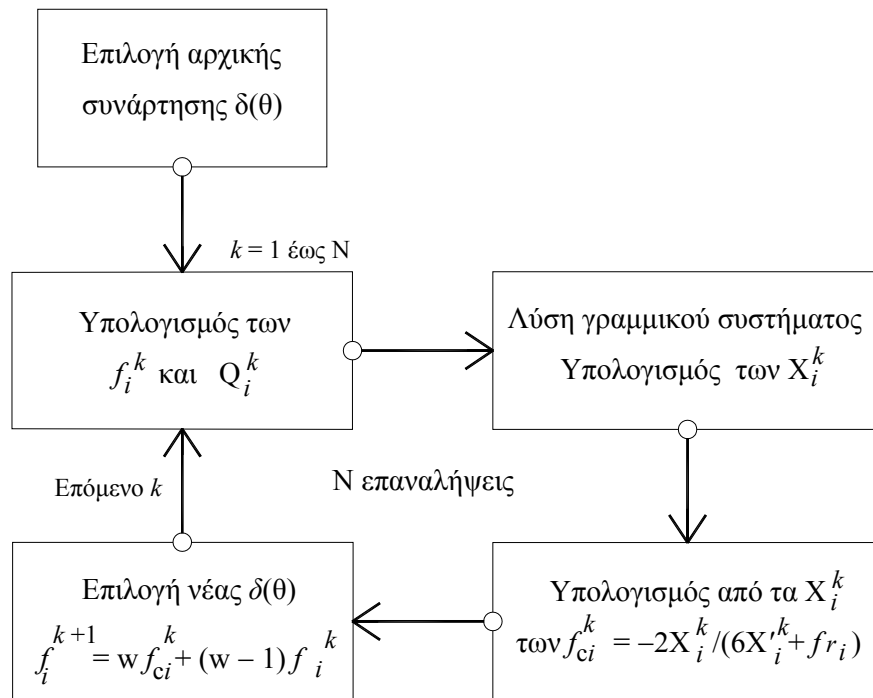
Συγκρίσεις της ακριβούς τιμής της συνάρτησης κλίσης $f(\theta)$ με υποθετικές συναρτήσεις σχήματος που προκύπτουν από τον συνδυασμό των Εξ. (4.68) και (4.80) για διάφορες τιμές του εκθέτη m και για τις τέσσερις περιπτώσεις $\varphi = 30^\circ$ και 45° και $\delta = \varphi/2$ και φ σε κατακόρυφο τοίχο και οριζόντιο επίχωμα, απεικονίζονται στο Σχ. 4.18. Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι με την κατάλληλη επιλογή του εκθέτη m μπορεί να επιτευχθεί μια πολύ αξιόπιστη συνάρτηση σχήματος, αλλά εντούτοις η βέλτιστη τιμή μεταβάλλεται για διαφορετικές τιμές της γωνίας τριβής. Αυτό σημαίνει ότι πριν επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων, δεν μπορεί να είναι εκ των προτέρων γνωστό αν η αρχική συνάρτηση σχήματος που επιλέγεται είναι η καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη επαναληπτική διαδικασία πραγματοποιείται δύο φορές, για τις τέσσερις περιπτώσεις του Σχ. 4.18, με χρήση δύο διαφορετικών αρχικών εκτιμήσεων για τη συνάρτηση της κλίσης $f(\theta)$. Η πρώτη συνάρτηση σχήματος βασίζεται στην απλοϊκή θεώρηση της γραμμικής μεταβολής της συνάρτησης κλίσης (κόκκινες γραμμές του Σχ.

4.18), η χρήση της οποίας δεν προϋποθέτει τη γνώση της Εξ. (4.68) που συνδέει τη συνάρτηση κλίσης με την περιστροφή των κυρίων επιπέδων, ούτε κάποια υπόθεση για αυτή την περιστροφή (Εξ. 4.80). Ως δεύτερη συνάρτηση σχήματος επιλέγεται μια ρεαλιστικότερη συνάρτηση σχήματος, μέσω ενός κατάλληλου κάθε φορά εκθέτη m . Οι δύο αυτές συναρτήσεις σχήματος ελέγχονται ως προς την ταχύτητα σύγκλισής τους κατά την επαναληπτική διαδικασία.

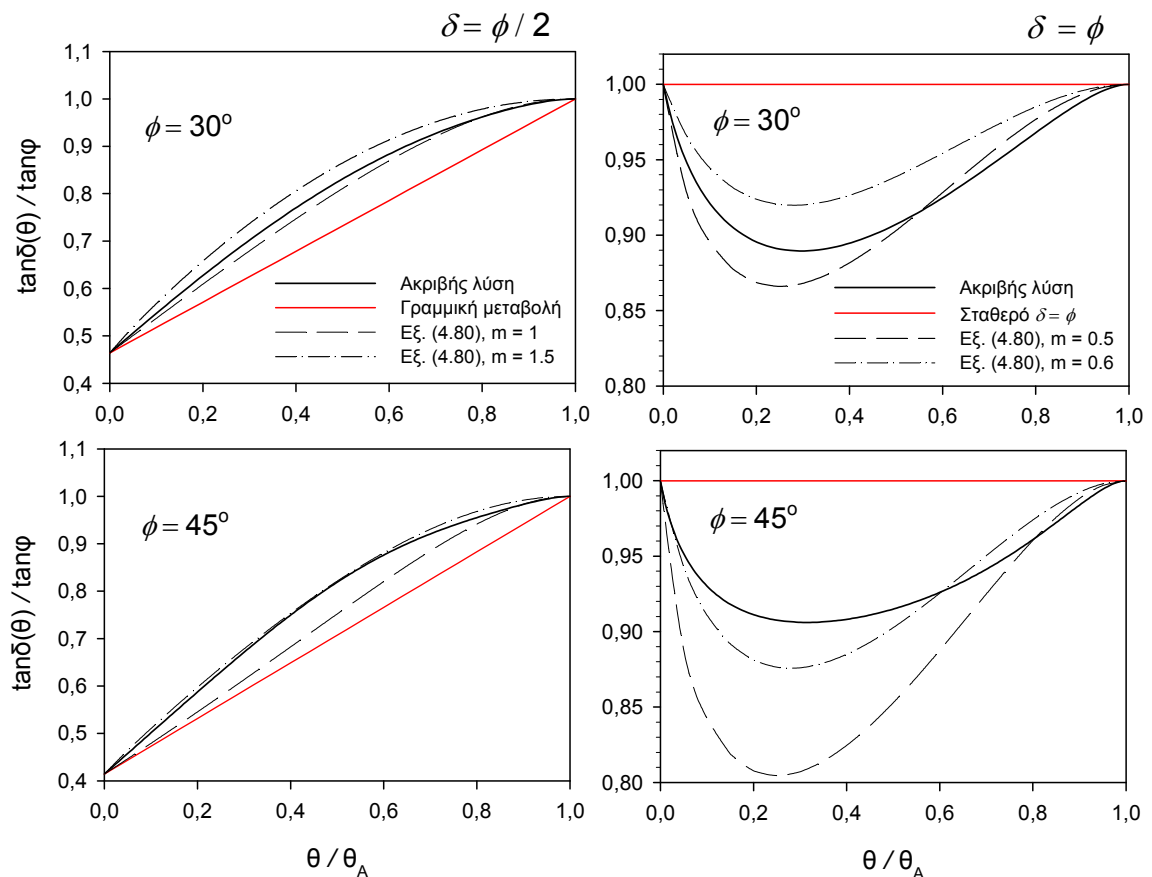
Τα αριθμητικά αποτελέσματα των αναλύσεων απεικονίζονται στα Σχ. 4.19 έως 4.26 για τις παθητικές ωθήσεις και στα Σχ. 4.27 έως 4.34 για τις ενεργητικές. Σε όλα τα διαγράμματα, τα αποτελέσματα της πρώτης από τις δύο επιλογές αρχικής συνάρτησης σχήματος σχεδιάζεται με κόκκινη γραμμή, ενώ της δεύτερης με πράσινη. Η σύγκλιση των λύσεων απεικονίζεται με τα διαγράμματα της μεταβολής του συντελεστή παθητικών ή ενεργητικών εδαφικών ωθήσεων με τον αριθμό των επαναλήψεων, ενώ για λόγους καλύτερης εποπτείας, παρουσιάζεται και η σύγκλιση της ίδιας της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας. Για όλες τις αριθμητικές αναλύσεις η ζώνη Boussinesq διακριτοποιείται με 100 σημεία.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η σύγκλιση είναι αρκετά γρήγορη, ακόμα και για κακή αρχική εκτίμηση της γραμμικής συνάρτησης σχήματος. Η μεγαλύτερη δυσκολία σύγκλισης παρουσιάζεται στην περίπτωση $\delta = \varphi = 45^\circ$ (Σχ. 4.24 και 4.26) ακόμα και για τη ρεαλιστικότερη, μη-γραμμική συνάρτηση σχήματος (πράσινη καμπύλη), η οποία συμπεριφέρεται πολύ πιο ομαλά, χωρίς ωστόσο να παρουσιάζει θεαματικά γρηγορότερη σύγκλιση από την απλοϊκή γραμμική συνάρτηση. Γενικώς η μέθοδος απαιτεί περίπου από 10 έως 50 επαναλήψεις για να πετύχει ικανοποιητική σύγκλιση, που θεωρείται μεγάλος αριθμός για επαναληπτική μέθοδο, παρουσιάζει όμως εξαιρετική σταθερότητα αναφορικά με τη σύγκλιση για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

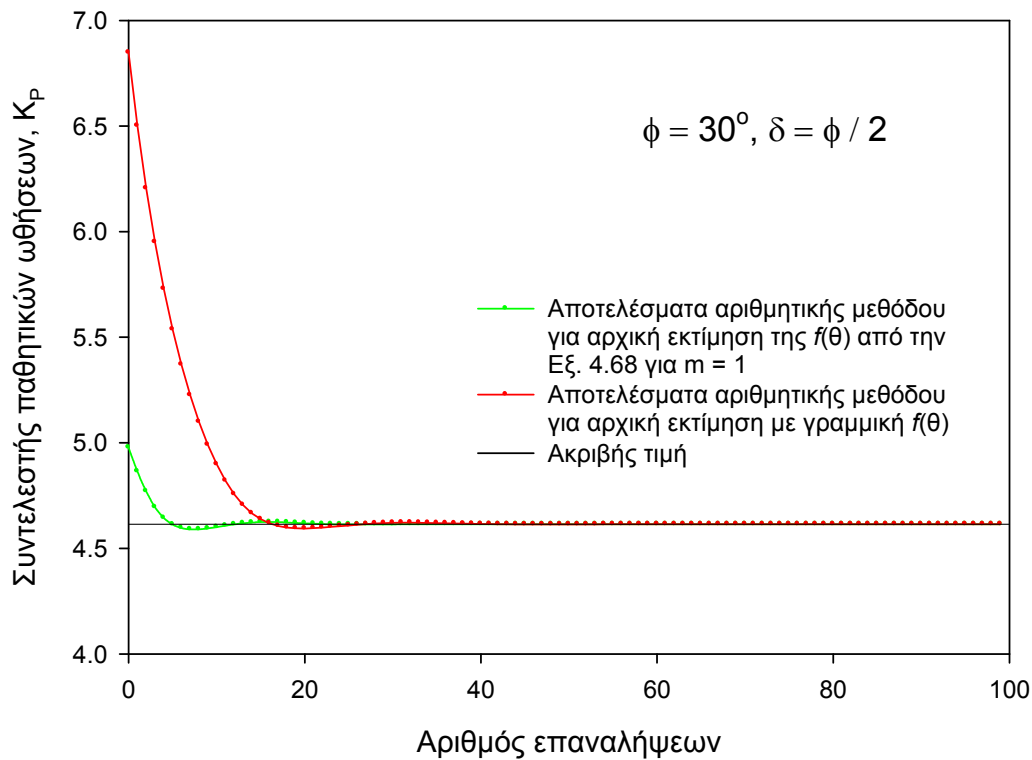
Τα πράγματα βελτιώνονται στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων (Σχ. 4.27 έως 4.34), στην οποία ικανοποιητική σύγκλιση επιτυγχάνεται σε λιγότερες από 10 επαναλήψεις. Για τις αντίστοιχες περιπτώσεις με τις παθητικές ωθήσεις έχουν χρησιμοποιηθεί οι ίδιες συναρτήσεις σχήματος (ίδιες τιμές του εκθέτη m). Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι αυτές οι τιμές του εκθέτη m δεν ανταποκρίνονται το ίδιο καλά στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων. Αυτό γίνεται πιο φανερό στις περιπτώσεις με $\delta = \varphi$ (Σχ. 4.28 και 4.30, 4.32 και 4.34), όπου θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί πολύ χαμηλότερη τιμή για τον εκθέτη m (0.2 ή 0.3 αντί του 0.5 και 0.6) προκειμένου να υπάρχει εξαρχής καλή προσέγγιση της συνάρτησης $f(\theta)$.



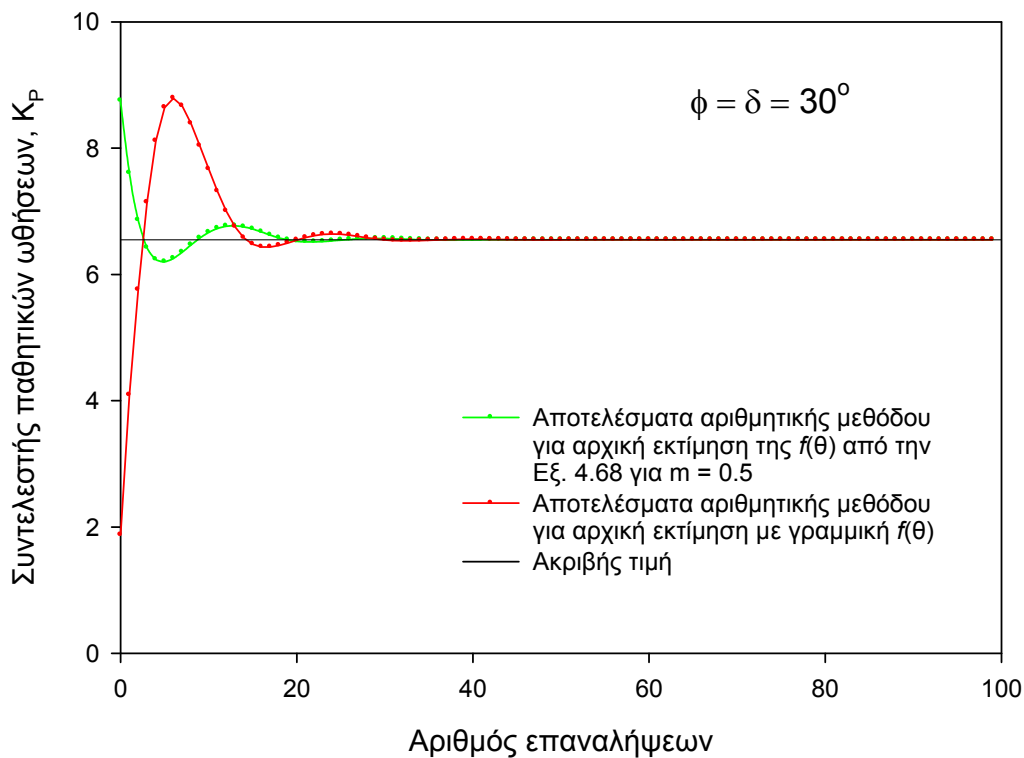
Σχήμα 4.17 Διάγραμμα ροής της επαναληπτικής μεθόδου



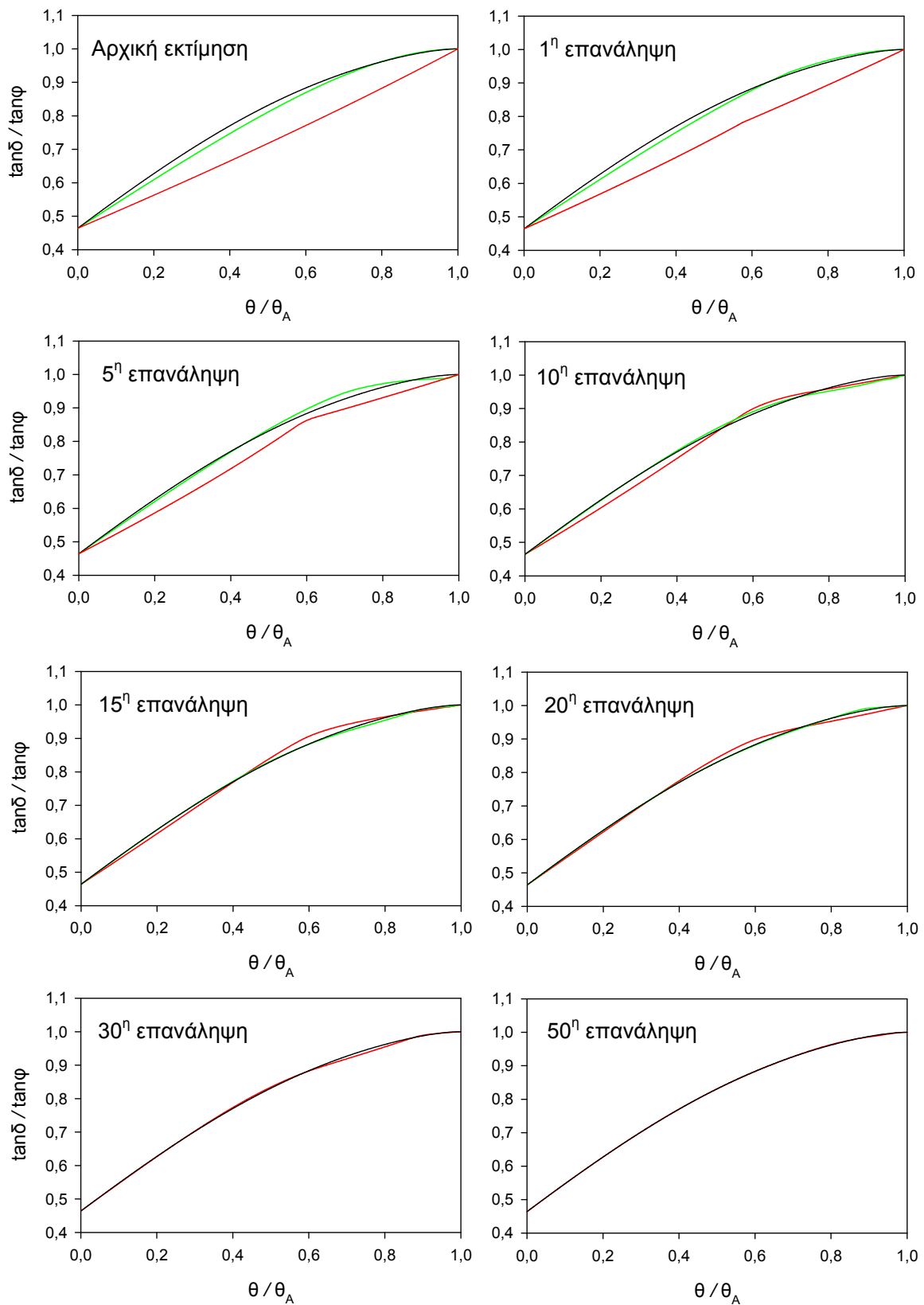
Σχήμα 4.18 Σύγκριση προσεγγιστικών συναρτήσεων $f(\theta)$ για διάφορες τιμές του εκθέτη m , με τις ακριβείς αριθμητικές τιμές.



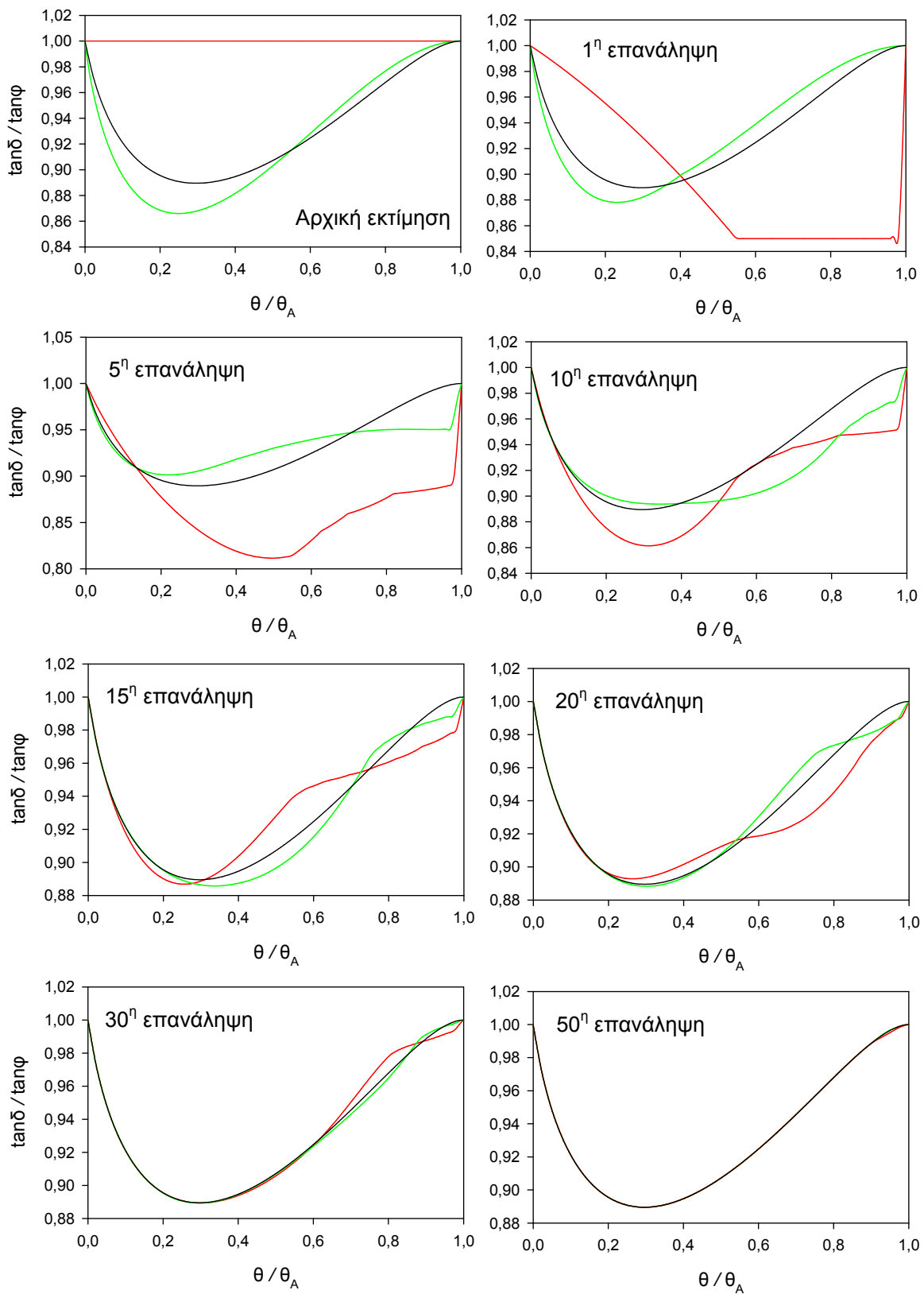
Σχήμα 4.19 Σύγκλιση του συντελεστή παθητικών ωθήσεων K_p με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\phi = 30^\circ$ και $\delta = \phi/2$



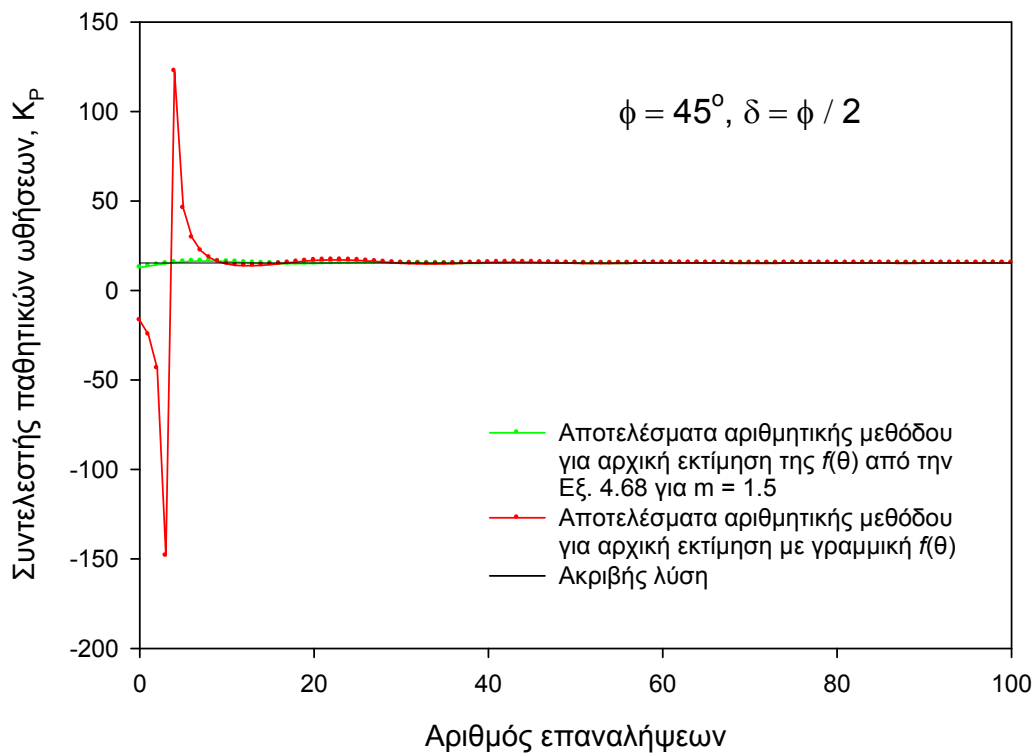
Σχήμα 4.20 Σύγκλιση του συντελεστή παθητικών ωθήσεων K_p με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\delta = \phi = 30^\circ$



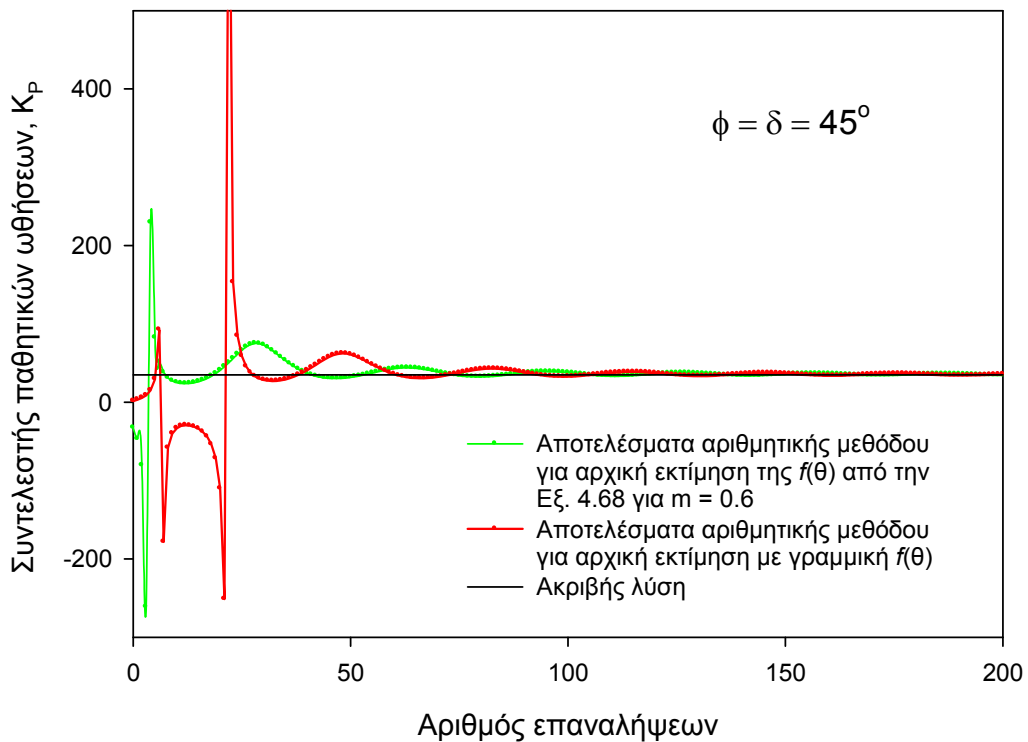
Σχήμα 4.21 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\varphi = 30^\circ$ και $\delta = \varphi/2$



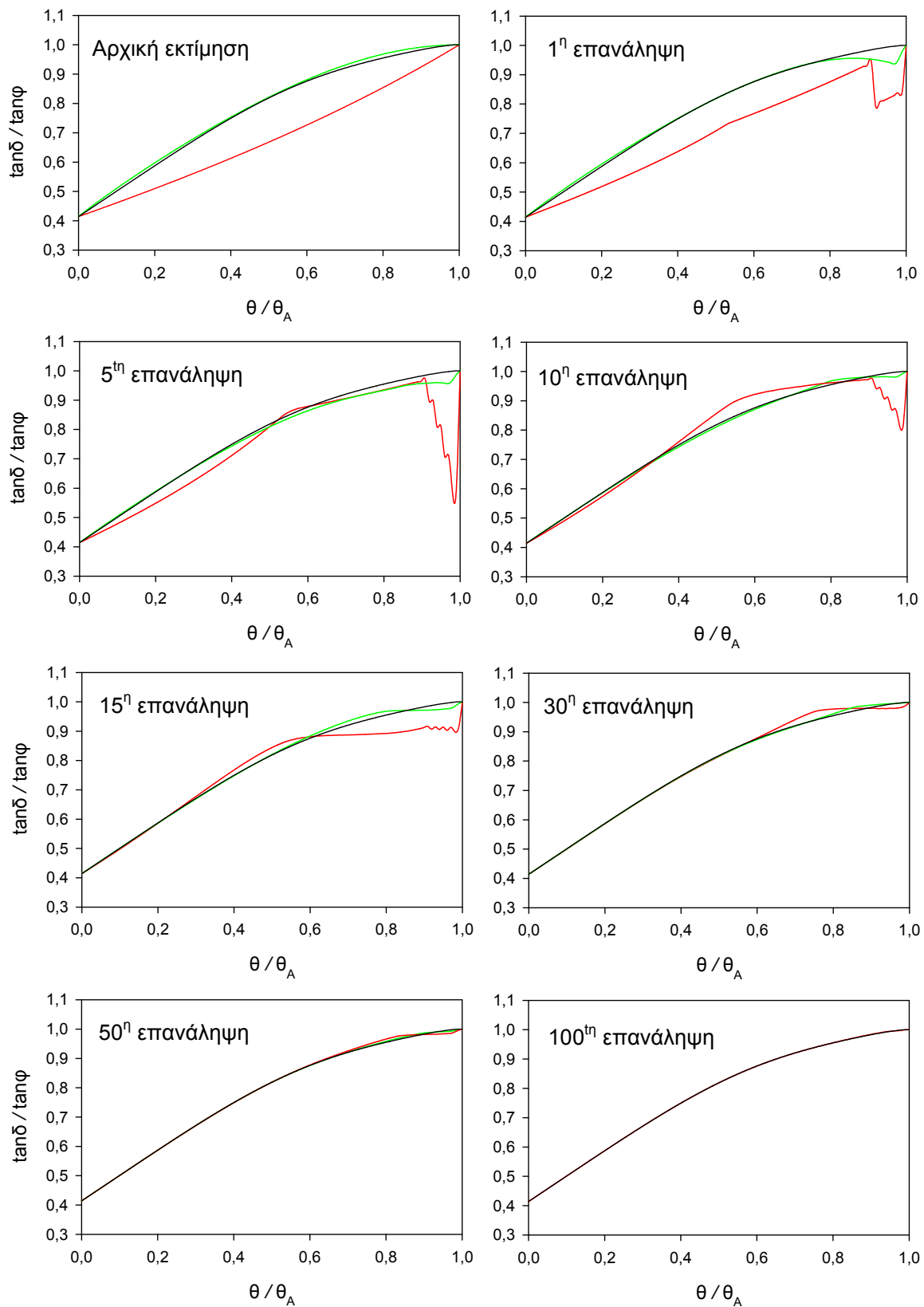
Σχήμα 4.22 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\delta = \varphi = 30^\circ$



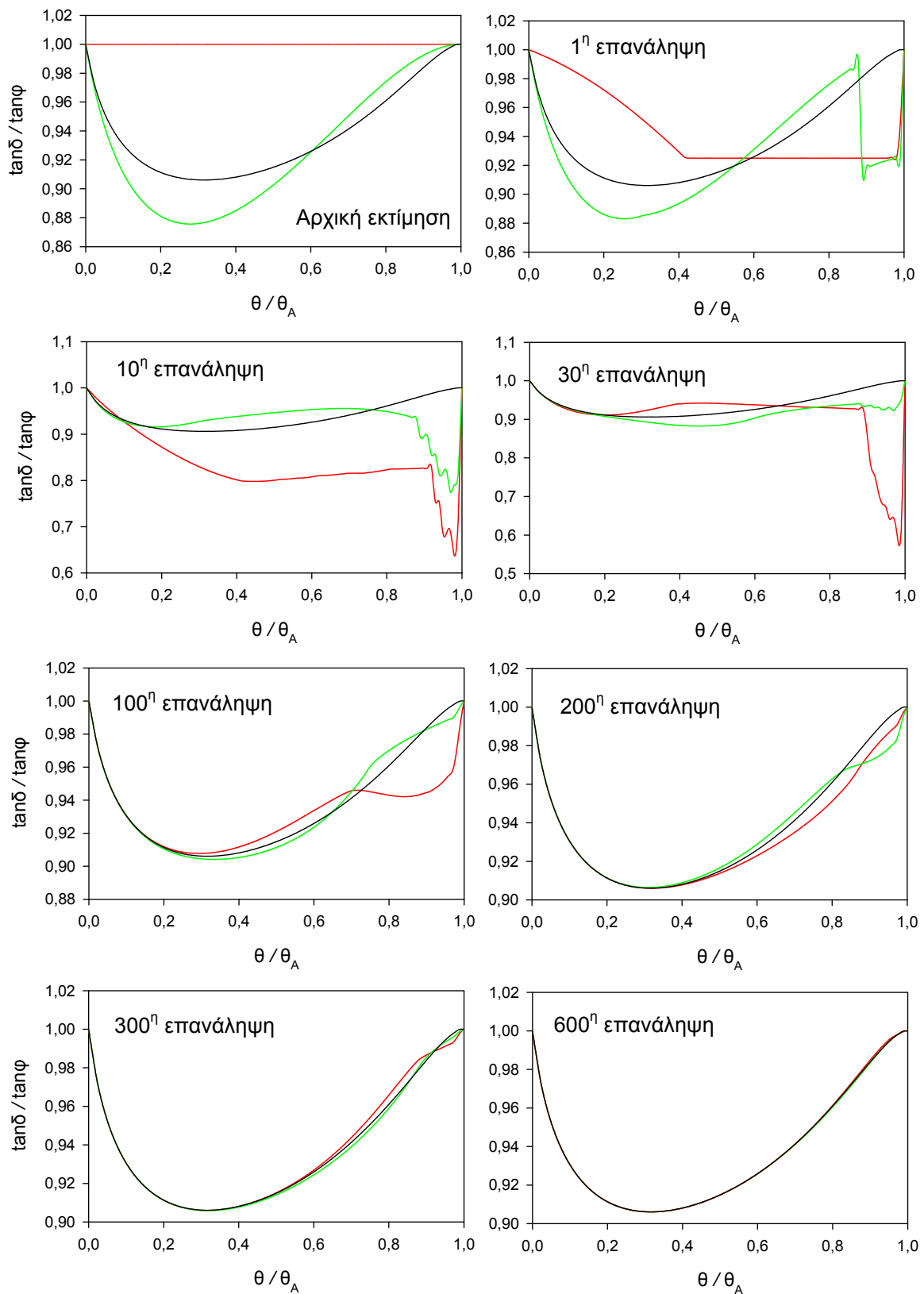
Σχήμα 4.23 Σύγκλιση του συντελεστή παθητικών ωθήσεων K_p με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\phi = 45^\circ$ και $\delta = \phi/2$



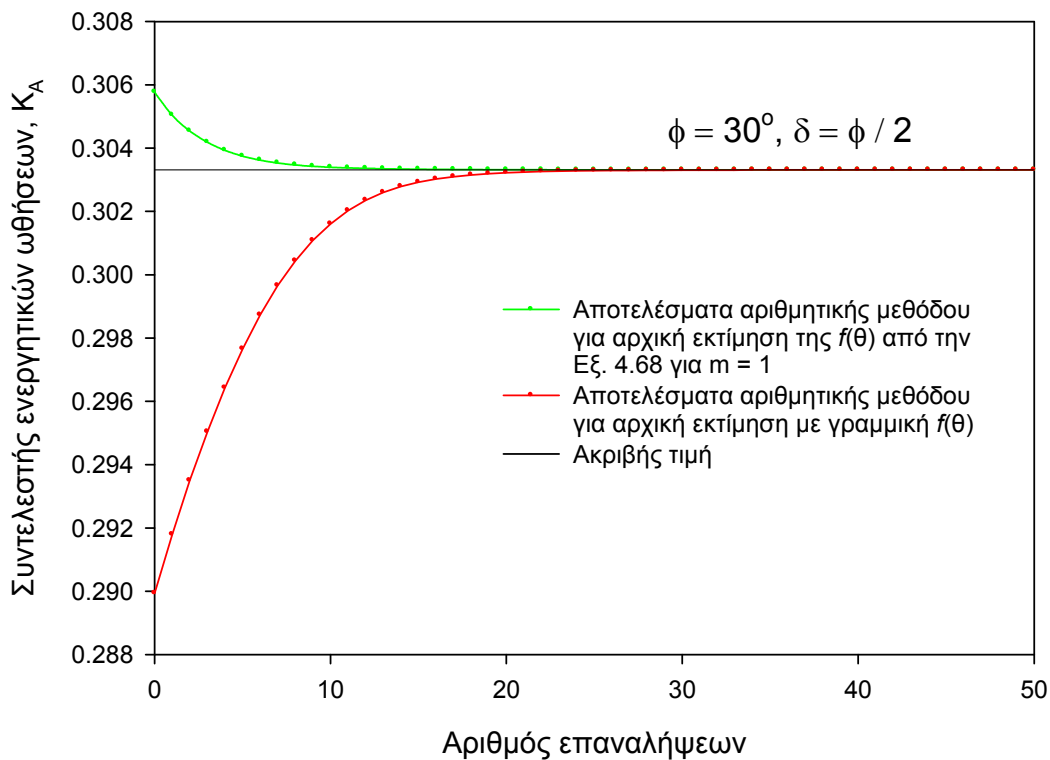
Σχήμα 4.24 Σύγκλιση του συντελεστή παθητικών ωθήσεων K_p με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\delta = \phi = 45^\circ$



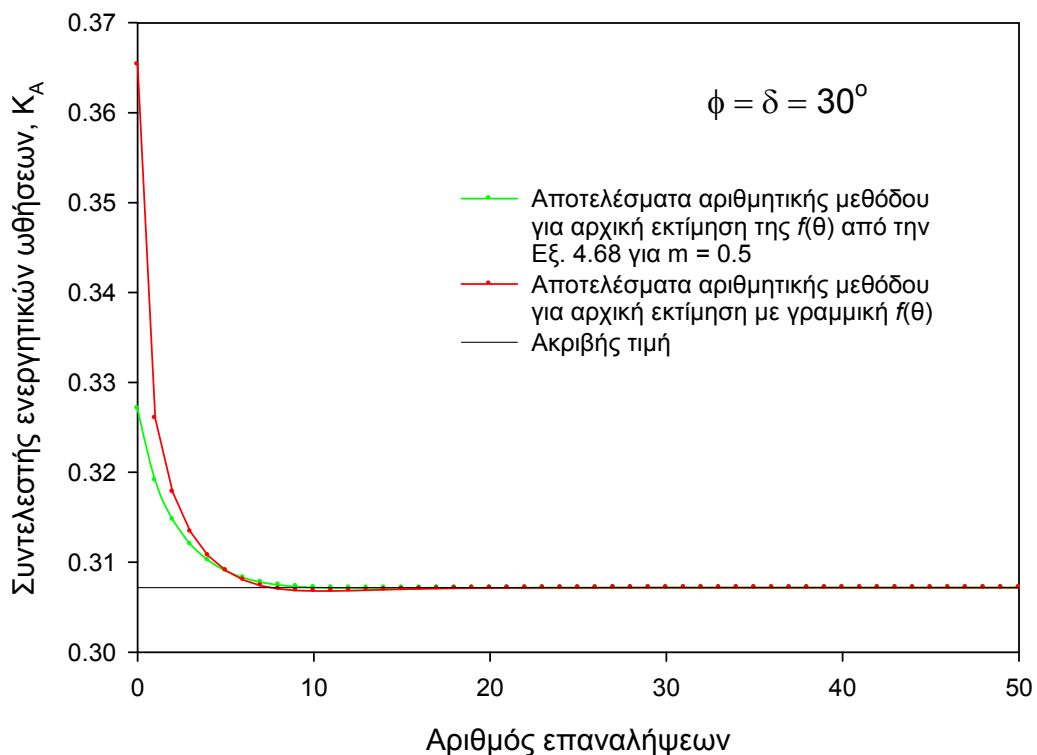
Σχήμα 4.25 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\phi = 45^\circ$ και $\delta = \phi/2$



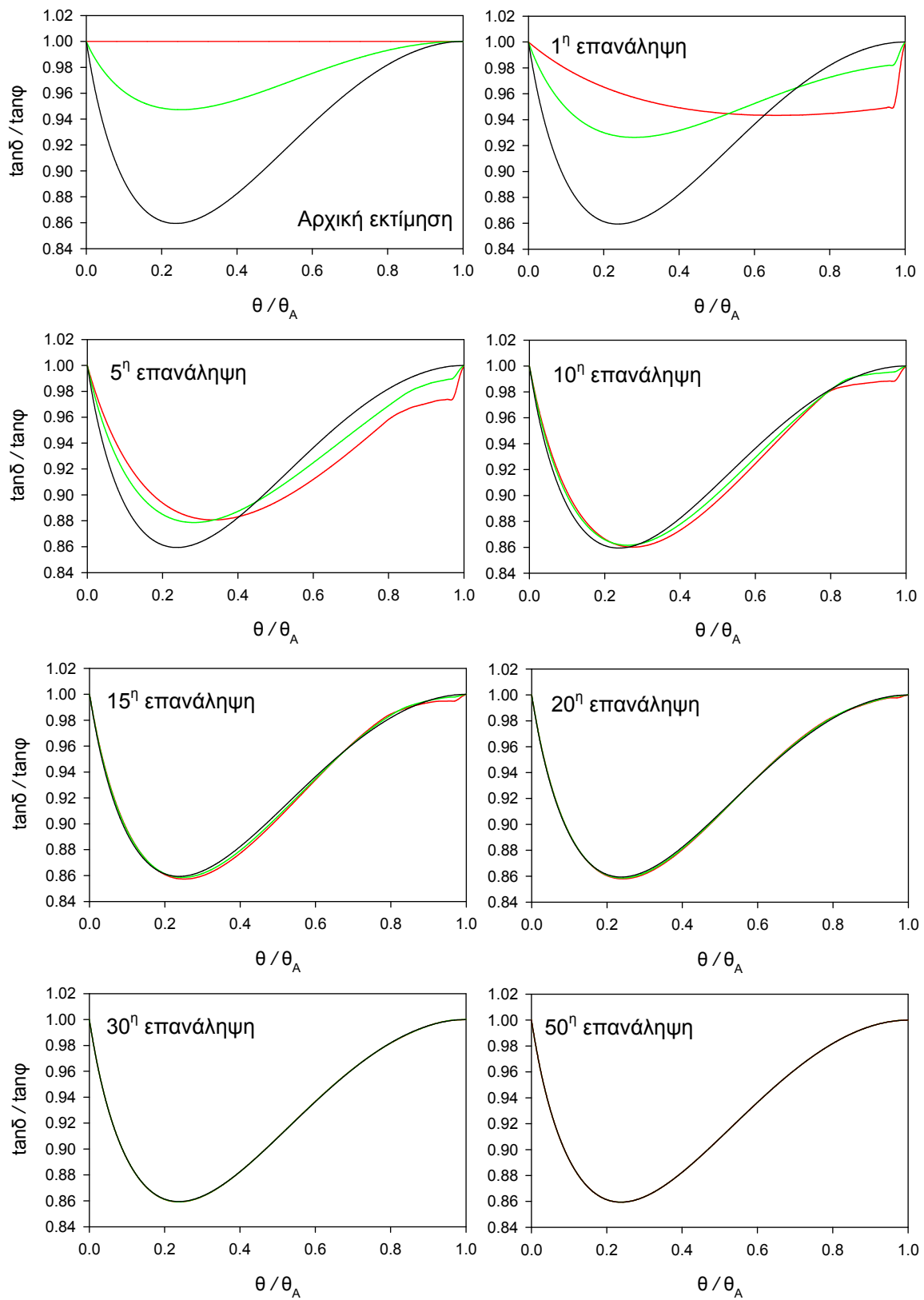
Σχήμα 4.36 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\delta = \varphi = 45^\circ$



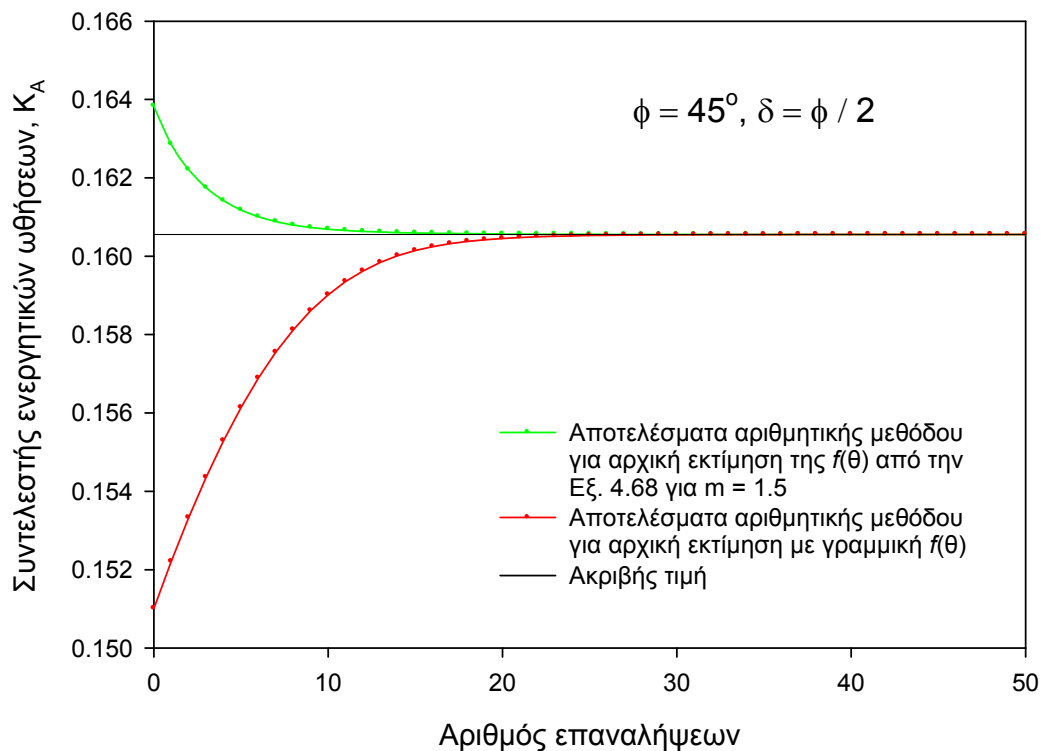
Σχήμα 4.27 Σύγκλιση του συντελεστή ενεργητικών ωθήσεων K_A με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\phi = 30^\circ$ και $\delta = \phi/2$



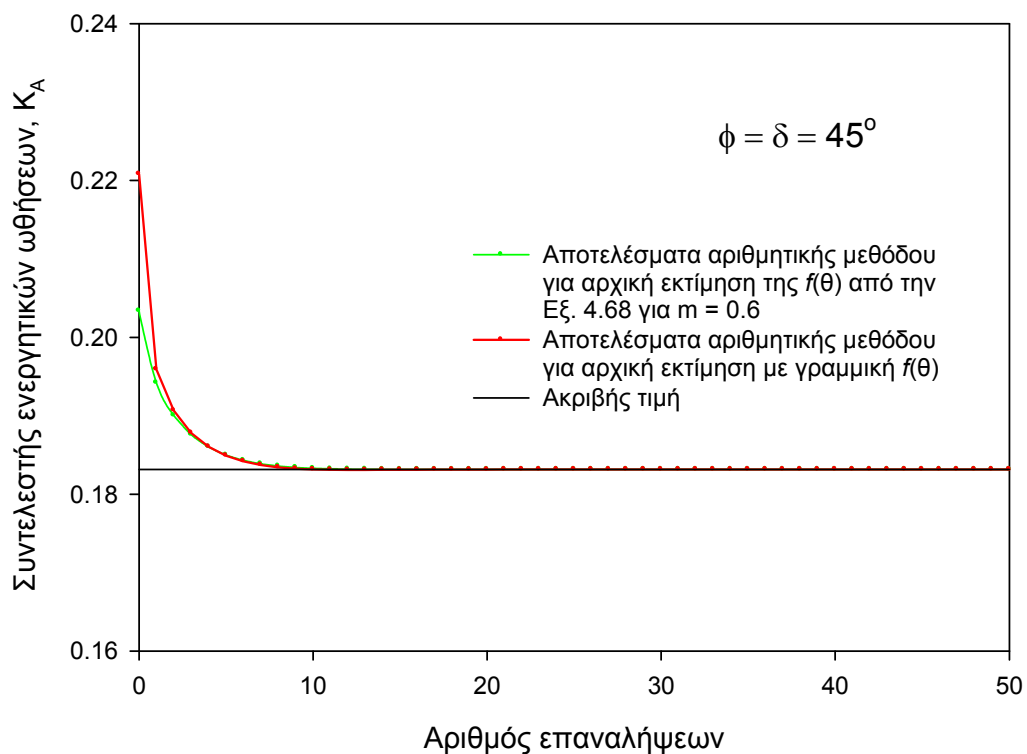
Σχήμα 4.28 Σύγκλιση του συντελεστή ενεργητικών ωθήσεων K_A με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\delta = \phi = 30^\circ$



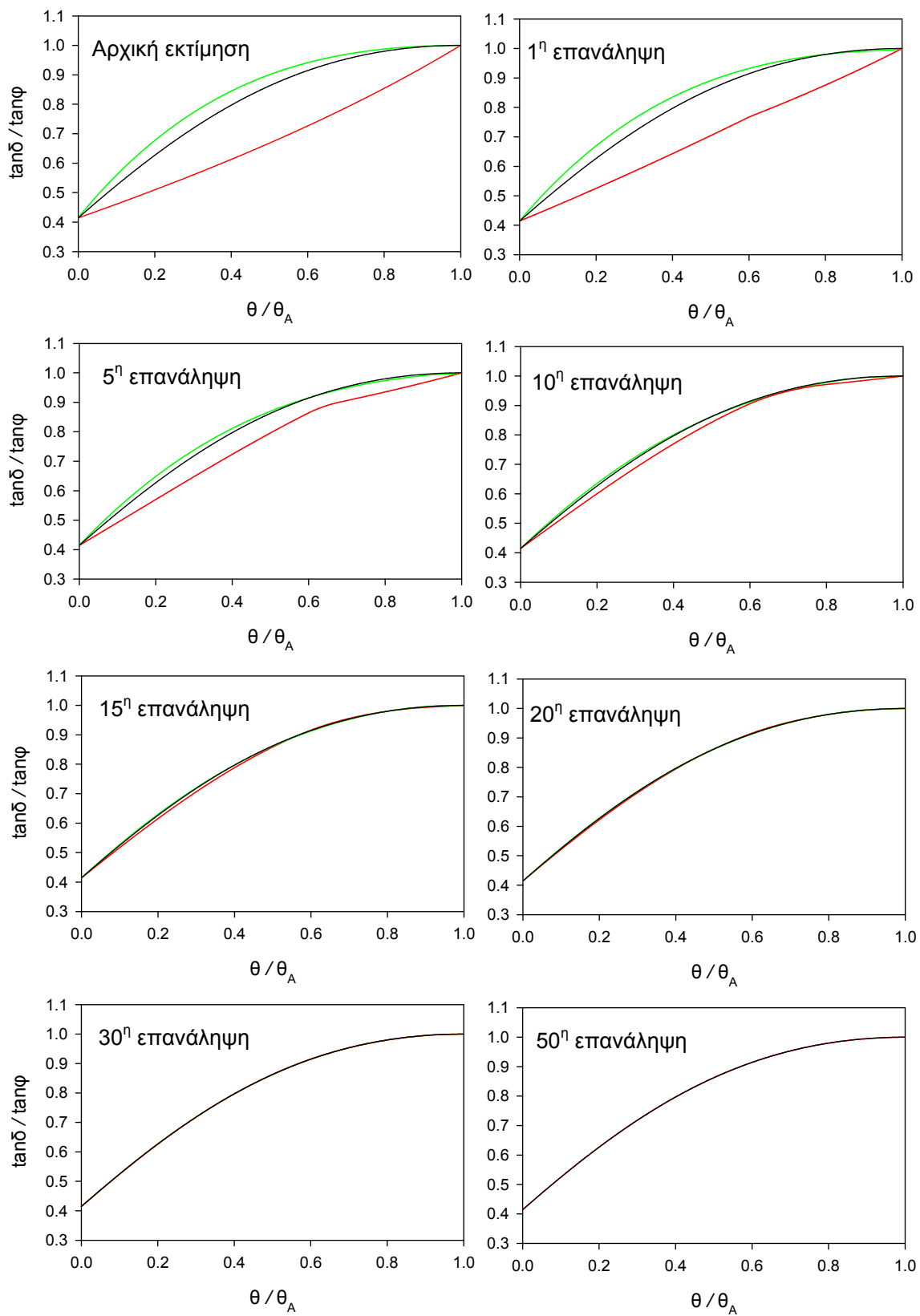
Σχήμα 4.30 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\delta = \varphi = 30^\circ$



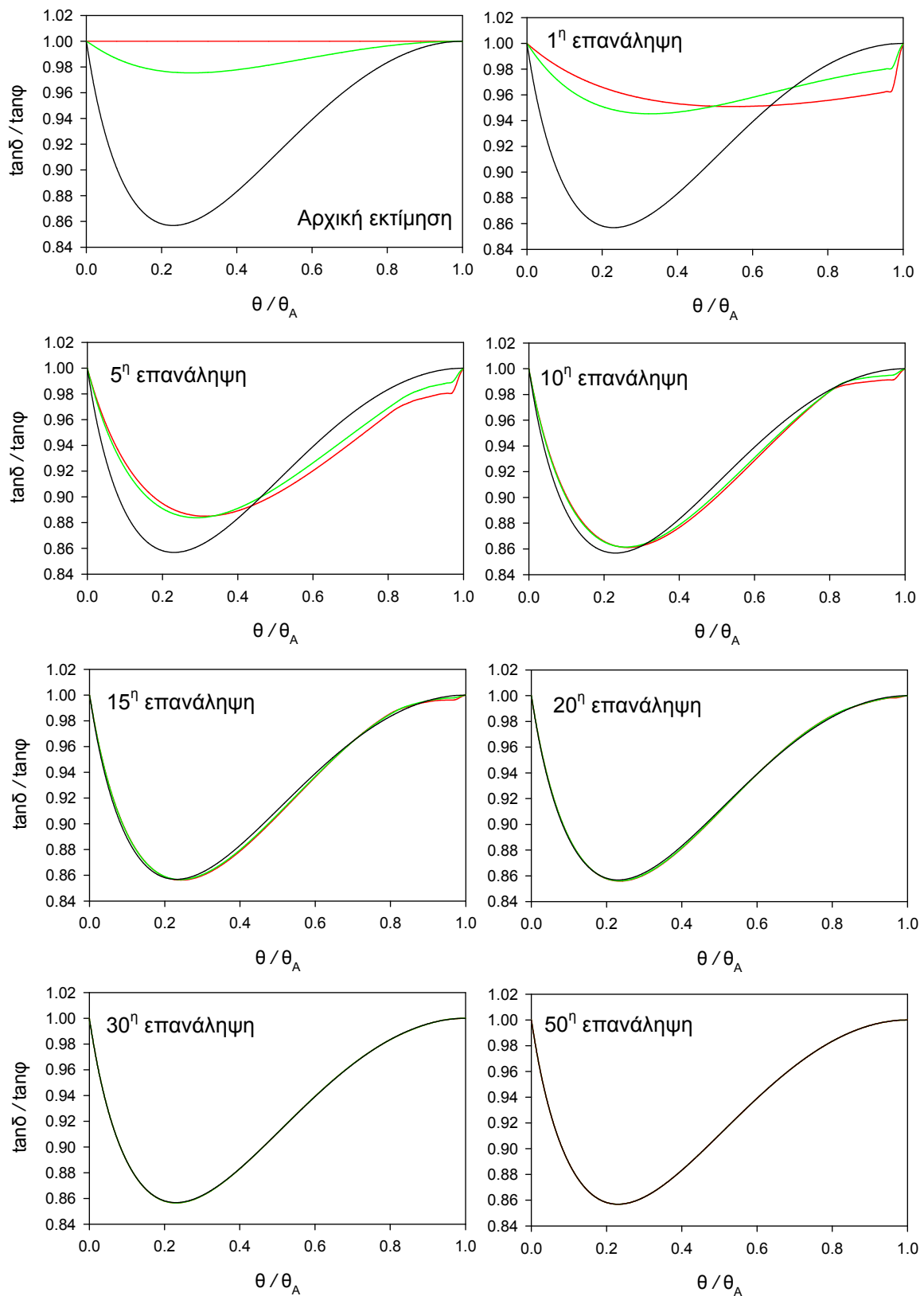
Σχήμα 4.31 Σύγκλιση του συντελεστή ενεργητικών ωθήσεων K_A με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση $\phi = 45^\circ$ και $\delta = \phi/2$



Σχήμα 4.32 Σύγκλιση του συντελεστή ενεργητικών ωθήσεων K_A με τον αριθμό των επαναλήψεων για την περίπτωση όπου $\delta = \phi = 45^\circ$



Σχήμα 4.33 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\phi = 45^\circ$ και $\delta = \phi/2$



Σχήμα 4.34 Σύγκλιση της συνάρτησης $f(\theta)$ σε διάφορες φάσεις της επαναληπτικής διαδικασίας για την περίπτωση $\delta = \varphi = 45^\circ$

4.4.3 Αξιολόγηση της προσεγγιστικής εκθετικής λύσης για το ριπίδιο των τάσεων (Mylonakis et al., 2007)

Στην παρούσα υποενότητα διερευνάται η συμπεριφορά της προσεγγιστικής εκθετικής συνάρτησης που χρησιμοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 2 για την περιγραφή της μεταβολής των τάσεων εντός του ριπιδίου (Εξ. 2.9), σύμφωνα με την οποία, το κέντρο του κύκλου Mohr σε τυχαίο προσανατολισμό θ , δίνεται από την εξίσωση:

$$S(\theta) = S_A e^{2(\theta_A - \theta) \tan \varphi} \quad (4.93)$$

Επειδή η Εξ. (4.93) αντιστοιχεί στο αβαρές ριπίδιο του Prandtl, οι ακτινικές διευθύνσεις θεωρούνται χαρακτηριστικές, με σταθερή κλίση της ώθησης πάνω σε αυτές, ίση με $\tan \varphi$. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγούμενα, αυτό συμβαίνει για γραμμική μεταβολή της γωνίας του μέγιστου κύριου επιπέδου $\theta_1(\theta)$, δηλαδή για $m = 1$ στην Εξ. (4.80). Με κατάλληλη τροποποίηση των γεωμετρικών σχέσεων που προκύπτουν από τον κύκλο Mohr του Σχ. 4.10, λαμβάνονται οι εξισώσεις των τριών συνιστωσών του τανυστή των τάσεων μέσα στη ζώνη του ριπιδίου

$$\sigma_\theta = \gamma r \cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{1 + \sin \varphi \cos[2\theta - 2\theta_1(\theta)]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} e^{2(\theta_A - \theta) \tan \varphi} \quad (4.94\alpha)$$

$$\sigma_r = \gamma r \cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{1 - \sin \varphi \cos[2\theta - 2\theta_1(\theta)]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} e^{2(\theta_A - \theta) \tan \varphi} \quad (4.94\beta)$$

$$\tau_{r\theta} = \gamma r \cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{\sin \varphi \sin[2\theta - 2\theta_1(\theta)]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} e^{2(\theta_A - \theta) \tan \varphi} \quad (4.94\gamma)$$

Με τη βοήθεια των Εξ. (4.94), ελέγχεται εάν η προσεγγιστική λύση του ριπιδίου ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας (Εξ. 4.20), μέσω του υπολογισμού των κανονικοποιημένων, ως προς το ειδικό βάρος γ , υπολοίπων \bar{R}_r και \bar{R}_θ των Εξ. (4.95α) και (4.95β) και το κριτήριο αστοχίας μέσω του γνωστού ελέγχου της Εξ. (4.95γ), ενώ παράλληλα ελέγχεται η κλίση της ώθησης σε κάθε ακτινική διεύθυνση θ , μέσω του λόγου $\tan \delta(\theta) = \tau_{r\theta} / \sigma_\theta$, ο οποίος δίνει την Εξ. (4.68).

$$\bar{R}_r = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \gamma \cos \theta \right) \quad (4.20\alpha)$$

$$\bar{R}_\theta = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \gamma \sin \theta \right) \quad (4.20\beta)$$

$$\sin \varphi^* = \sqrt{[4\tau^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2] / (\sigma_r + \sigma_\theta)^2} \quad (4.95\gamma)$$

$$\tan \delta(\theta) = \frac{\sin \varphi \sin[2(\theta - \theta_1)]}{1 + \sin \varphi \cos[2(\theta - \theta_1)]} \quad (4.68)$$

Τα αποτελέσματα των παραπάνω ελέγχων παρουσιάζονται στα Σχ. 4.35α-γ και 4.36α-γ για παθητικές και ενεργητικές βαρυτικές ωθήσεις αντίστοιχα, σε κατακόρυφο τοίχο που αντιστηρίζει οριζόντιο επίχωμα ($\omega = \beta = \psi_e = 0$) με ιδιότητες $\delta = \varphi = 30^\circ$.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ξεκάθαρα ότι οι Εξ. (4.94) δεν ικανοποιούν την ισορροπία των τάσεων ούτε στην ακτινική, ούτε στην εφαπτομενική διεύθυνση (Σχ. 4.35β και 4.36β), ενώ ικανοποιούν επακριβώς – χωρίς να παραβιάζουν – το κριτήριο αστοχίας (Σχ. 4.35α και 4.36α). Επίσης, από το Σχ. 4.35γ επιβεβαιώνεται η σταθερή κλίση $\tan \varphi$ της ώθησης σε ολόκληρο το άνοιγμα του ριπιδίου.

Εάν τώρα με τη βοήθεια της Εξ. (4.94α) υπολογιστεί η συνάρτηση δυναμικού $X(\theta)$ από την Εξ. (4.45α), έτσι ώστε να συμπεριληφθεί και ο όρος των μαζικών δυνάμεων f_r , όπως δείχνει η Εξ. (4.96)

$$X(\theta) = \frac{1}{6} \left(\sigma_\theta - \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right) \quad (4.96)$$

και οι τάσεις σ_r και $\tau_{r\theta}$ υπολογιστούν εκ νέου μέσω αυτής και των Εξ. (4.45α και γ)

$$\sigma_r = \gamma r \left[3X(\theta) + X''(\theta) + \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right] \quad (4.45\alpha)$$

$$\tau_{r\theta} = -\gamma r [2X'(\theta)] \quad (4.45\gamma)$$

τότε μπορούν να επαναληφθούν οι έλεγχοι των εξισώσεων ισορροπίας (Εξ. 4.20), του κριτηρίου αστοχίας και της κλίσης $\tan\delta$ με τη νέα μορφή των Εξ.(4.97) και (4.98)

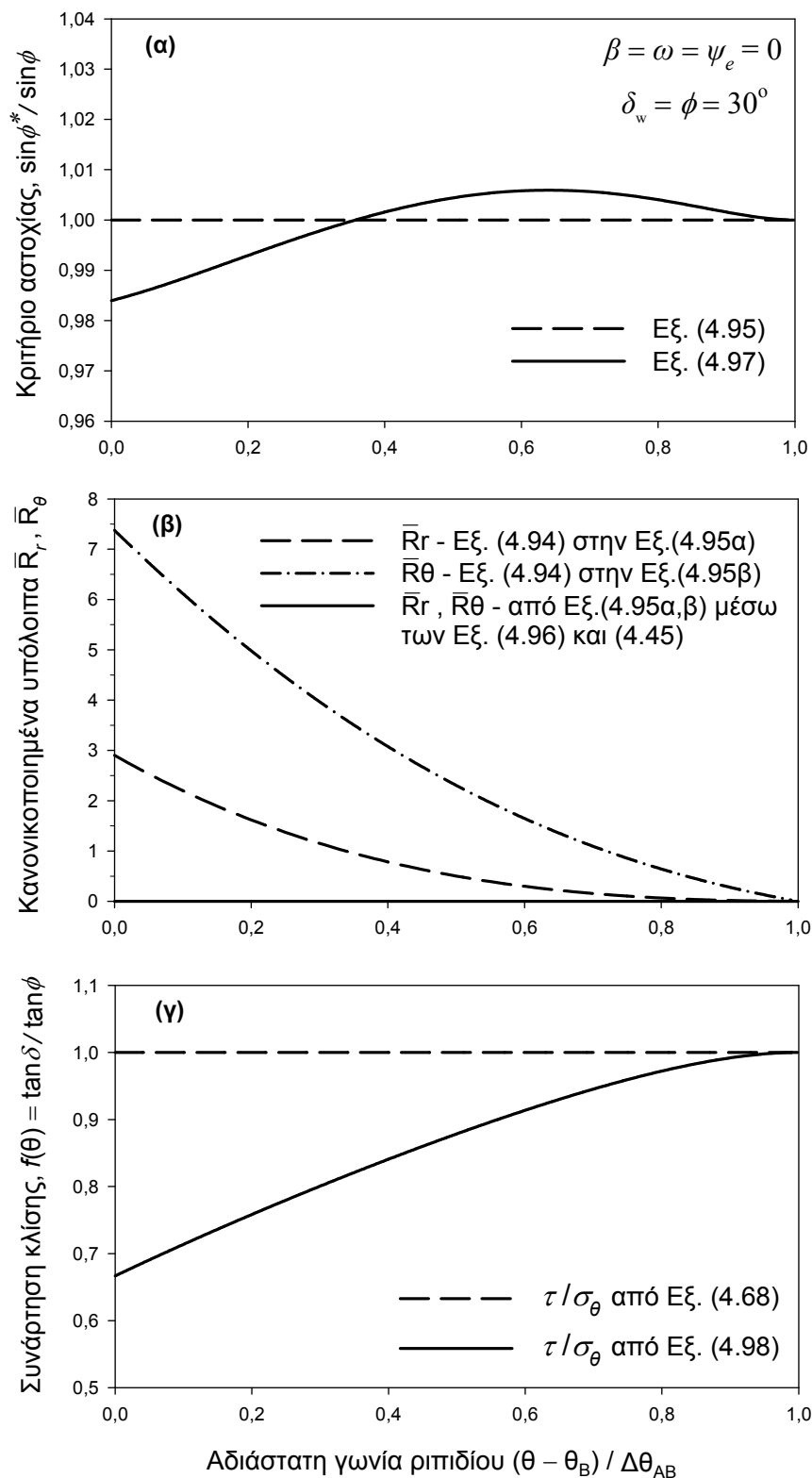
$$\sin \varphi^* = \sqrt{\frac{16X'(\theta)^2 + [-3X(\theta) + X''(\theta)]^2}{[9X(\theta) + X''(\theta) + 2\cos\theta]^2}} \quad (4.97)$$

$$\tan \delta(\theta) = -2X'(\theta)/[6X(\theta) + \cos\theta] \quad (4.98)$$

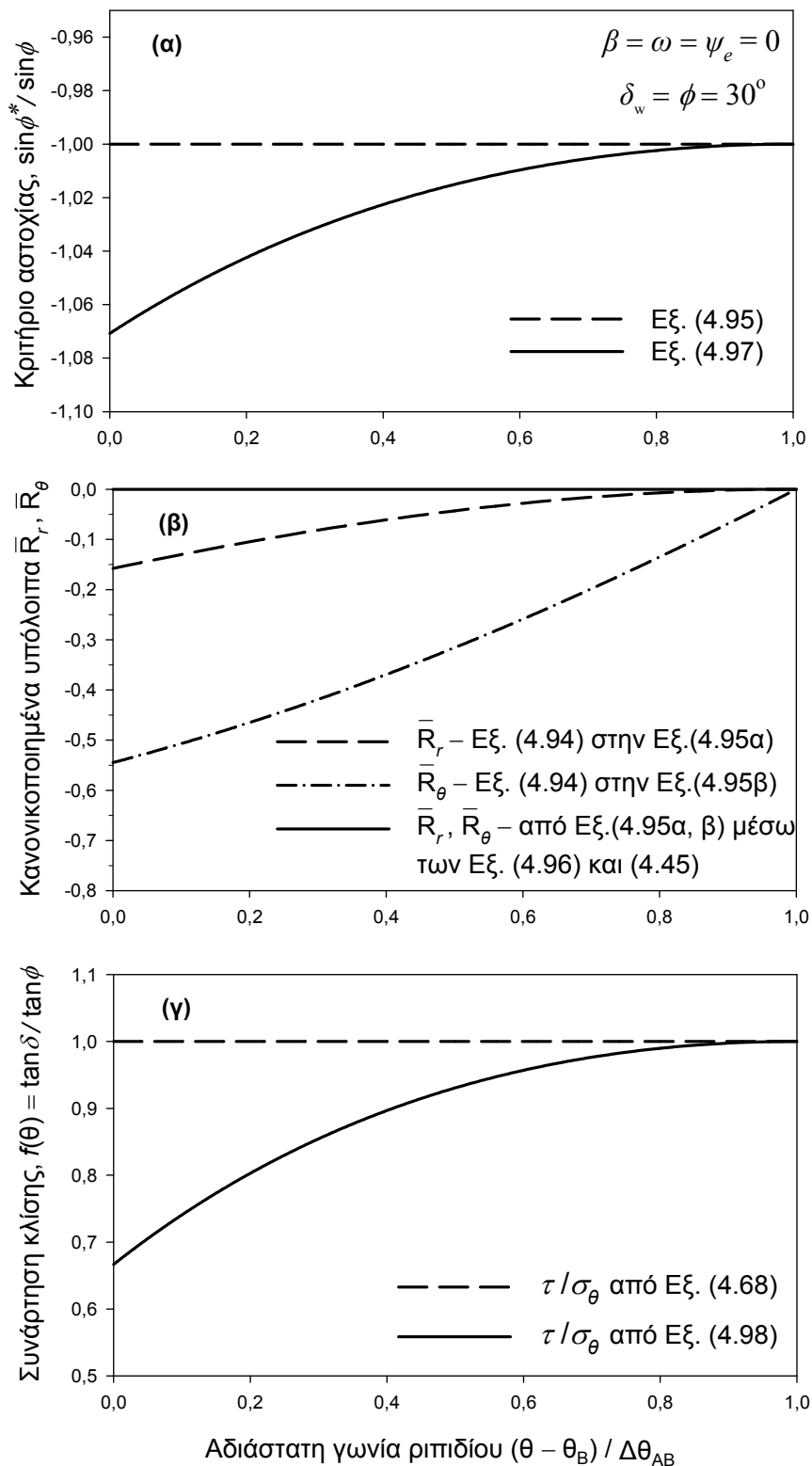
Τα αποτελέσματα των τελευταίων ελέγχων απεικονίζονται στα ίδια διαγράμματα των Σχ. 4.35α-γ και 4.36α-γ. Η χρήση της συνάρτησης X εξ' ορισμού οδηγεί στην ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας (Σχ. 4.35β και 4.36β), αλλά αντιθέτως δεν ικανοποιείται το κριτήριο αστοχίας, το οποίο άλλοτε παραβιάζεται και άλλοτε όχι στις παθητικές ωθήσεις (Σχ.4.35α), ενώ παραβιάζεται πάντοτε στις ενεργητικές (Σχ. 4.36α).

(1) Με άλλα λόγια, τόσο οι προσεγγιστικές λύσεις (Εξ. 4.94), όσο και αυτές που προκύπτουν από την προσεγγιστική συνάρτηση $X(\theta)$ της Εξ. (4.96), δεν αποτελούν αυστηρά κάτω όρια με βάση τα θεωρήματα της οριακής ανάλυσης, καθώς οι πρώτες παραβιάζουν την ισορροπία, ενώ οι δεύτερες το κριτήριο αστοχίας. Ωστόσο, οι προβλέψεις των Εξ. (4.94) κινούνται στο πλευρό της ασφάλειας καθώς φαίνεται ότι πάντοτε υποεκτιμούν τις παθητικές ωθήσεις και υπερεκτιμούν τις ενεργητικές, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα από τις εξισώσεις ισορροπίας (θετικά υπόλοιπα $\bar{R}_r, \bar{R}_\theta$ στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, αρνητικά στις ενεργητικές). Από τα ίδια διαγράμματα είναι φανερό ότι οι μεγαλύτερες αποκλίσεις του προσεγγιστικού εκθετικού ριπιδίου συμβαίνουν, φυσιολογικά, στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων. Με βάση την παραπάνω ανάλυση, αποδεικνύεται ότι η προσεγγιστική εκθετική λύση του ριπιδίου των τάσεων (Mylonakis et al., 2007) δεν ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος κάτω ορίου της πλαστικής οριακής ανάλυσης, παρόλα αυτά, μπορεί να θεωρηθεί ως λύση κάτω ορίου καθώς οι προβλέψεις της είναι πάντοτε ασφαλείς.

Τέλος, από τα Σχ. 4.35γ και 4.36γ φαίνεται ότι η συνάρτηση $X(\theta)$ δεν ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $\tan\delta = \tan\varphi$, στο άκρο του ριπιδίου $\theta = \theta_B$, το οποίο στο συγκεκριμένο παράδειγμα ταυτίζεται με την διεπιφάνεια τοίχου εδάφους (στο $\theta = 0$).



Σχήμα 4.35 Έλεγχος συνθηκών ισορροπίας και κριτηρίου αστοχίας για την προσεγγιστική εκθετική συνάρτηση του ριπιδίου σε παθητικές ωθήσεις; $\omega = \beta = \psi_e = 0^\circ$, $\delta = \phi = 30^\circ$



Σχήμα 4.36 Έλεγχος συνθηκών ισορροπίας και κριτηρίου αστοχίας για την προσεγγιστική εκθετική συνάρτηση του ριπιδίου σε ενεργητικές ωθήσεις; $\omega = \beta = \psi_e = 0^\circ$, $\delta_w = \phi = 30^\circ$

4.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Στην παρούσα ενότητα παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα της προτεινόμενης λύσης υπό μορφή αδιάστατων διαγραμμάτων, για μεγάλο εύρος τιμών των γεωμετρικών (κλίσεις επιχώματος, β και τοίχου, ω), φυσικών παραμέτρων (γωνίες τριβής φ και δ) για βαρυτικές και σεισμικές, ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις. Τα αποτελέσματα για τις βαρυτικές ωθήσεις παρουσιάζονται με τη μορφή των γνωστών νομογραφημάτων Caquot & Kerisel (1948), τα οποία προτείνονται για πρακτικές εφαρμογές σε αρκετούς κατασκευαστικούς κανονισμούς (π.χ. EC7). Πάνω στα ίδια διαγράμματα, σχεδιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης των Kerisel & Absi (βάσει της μεθόδου των χαρακτηριστικών) τα οποία είναι ακριβέστερα από τα παλαιότερα των Caquot & Kerisel (1948). Επίσης σχεδιάζονται τα αποτελέσματα της κινηματικής οριακής ανάλυσης των Chen & Liu (1990) (άνω όριο) και της οριακής ανάλυσης τάσεων (κάτω όριο) της Εξ. (2.11) (Mylonakis et al., 2007).

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων με σεισμό χρησιμοποιούνται δύο εναλλακτικές μορφές διαγραμμάτων τροποποιημένων από την εργασία των Chen & Liu (1990), ώστε να παρουσιάζεται επαρκώς η επιρροή όλων των παραμέτρων του προβλήματος. Τα αποτελέσματα των σεισμικών ωθήσεων συγκρίνονται με τα αποτελέσματα γνωστών λύσεων άνω και κάτω ορίου, και κυρίως των Chen & Liu (1990) και Mylonakis et al. (2007), καθώς επίσης με τα αποτελέσματα της προτεινόμενης λύσης άνω ορίου της Παραγράφου 2.3. Για λόγους απλοποίησης των διαγραμμάτων, για τις συγκρίσεις χρησιμοποιείται μόνο η Εξ. (2.64), που αντιστοιχεί στο μηχανισμό αστοχίας με τη μία μόνο ζωνη Rankine, η οποία ταιριάζει καλύτερα στην ανάλυση του ριπιδίου του Κεφαλαίου 4, και η οποία βέβαια ταυτίζεται με την Εξ. (2.45) στην περίπτωση $\delta_w = \varphi$. Σε περιορισμένες συγκρίσεις χρησιμοποιούνται τα λίγα διαθέσιμα αριθμητικά αποτελέσματα για σεισμικές ωθήσεις με τη μέθοδο των γραμμών διαρροής που έχουν δημοσιευτεί από τους Kumar & Chitikela (2002) και Cheng (2003).

4.4.1 Συγκρίσεις βαρυτικών ωθήσεων

Στα Σχ. 4.37 έως 4.45 που ακολουθούν παρουσιάζονται αποτελέσματα για βαρυτικές, ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις συνθήκες, για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (α) Κατακόρυφος τοίχος και πρανές κλίσης β .
- (β) Οριζόντιο πρανές και τοίχος κλίσης ω ως προς την κατακόρυφο.
- (γ) Η οριζόντια συνιστώσα της περίπτωσης (β).

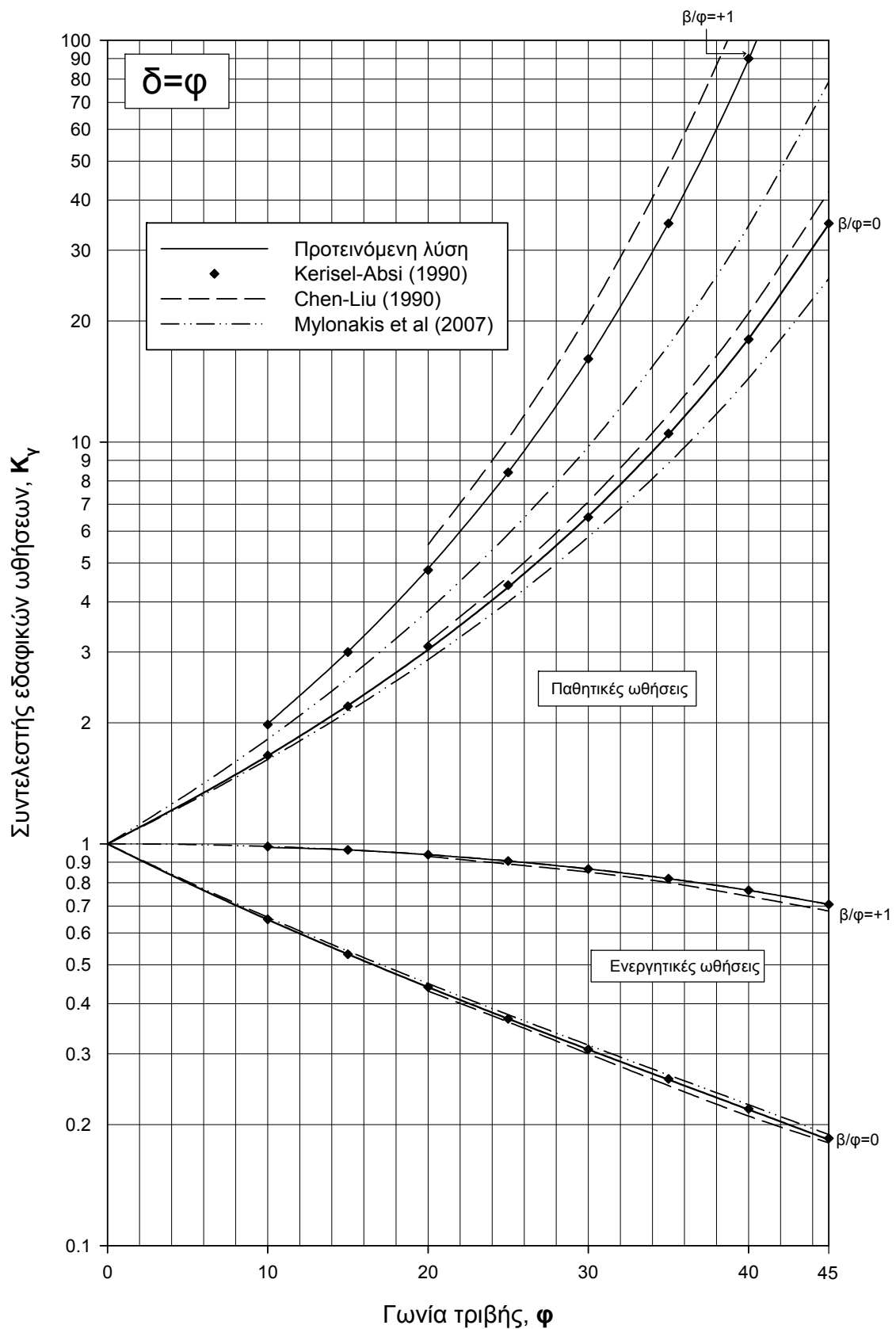
Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται για τρεις διαφορετικές τραχύτητες τοίχου: $\delta = \varphi$, $\delta = \varphi/2$ και $\delta = 0$, ως συνάρτηση της γωνίας τριβής φ .

Συγκεκριμένα, στα Σχ. 4.37 έως 4.39 παρουσιάζονται τα διαγράμματα της περίπτωσης (α) για γωνίες τριβής φ από 0 έως 45°, κλίσεις πρανούς β/φ από 1 και 0, για ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις. Οι καμπύλες των νομογραφημάτων έχουν προκύψει από διακριτές τιμές της γωνίας φ (ανά 5°). Η συμπεριφορά της λύσης είναι ομαλή και αναμενόμενη ως προς την εξάρτηση από τις παραμέτρους β , φ και δ .

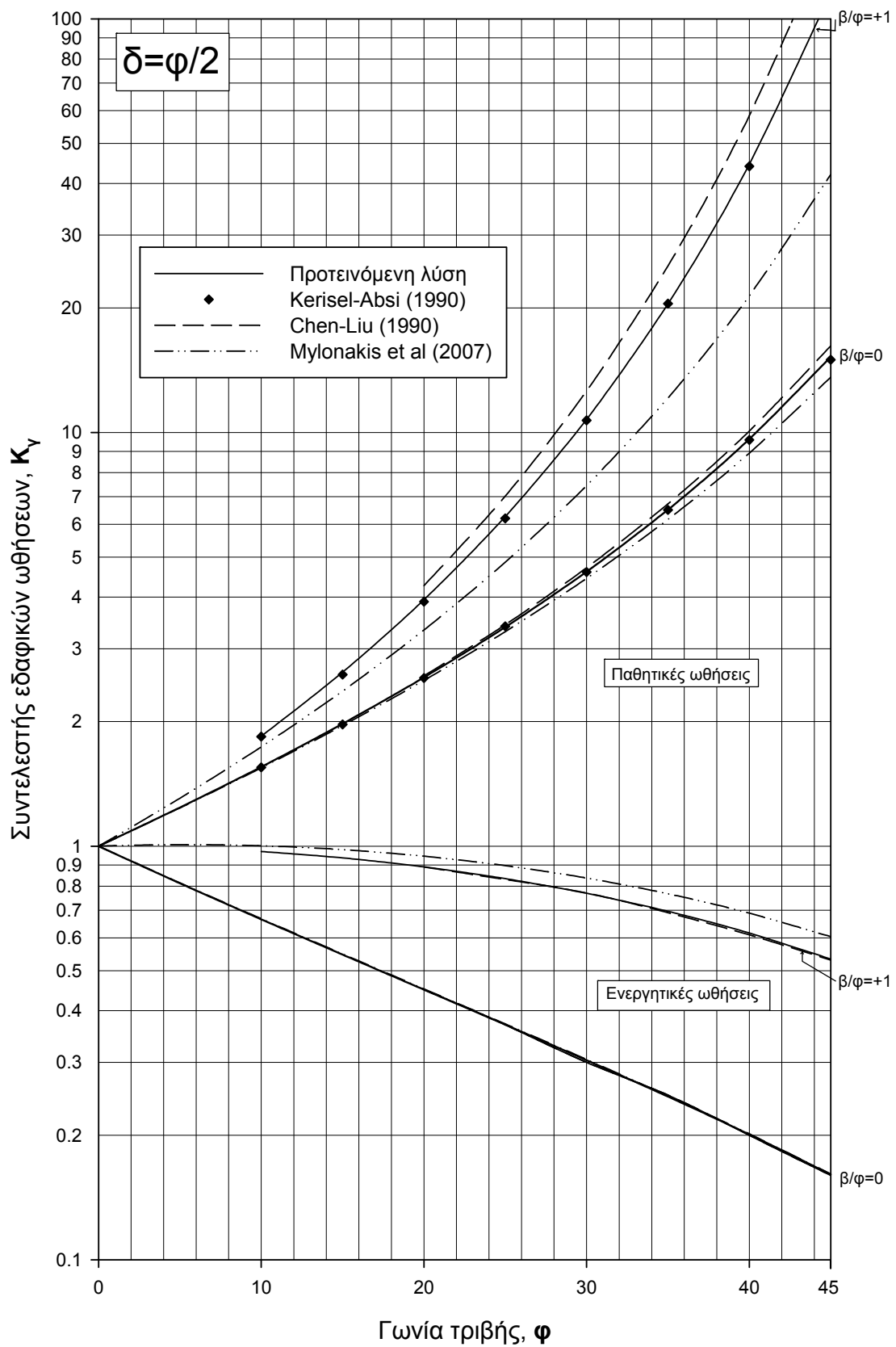
Στα Σχ. 4.40 έως 4.42 παρουσιάζονται τα διαγράμματα της περίπτωσης (β), για κλίσεις τοίχου ω ίσες με -30° , 0° , 30° . Οι καμπύλες, εκτός από τις περιπτώσεις κατακόρυφου τοίχου ($\omega = 0$), τερματίζονται στην τιμή $\varphi = 10^\circ$, καθώς οι καμπύλες του αδιάστατου συντελεστή K_γ δεν καταλήγουν στη μονάδα, εξαιτίας του γεωμετρικού μετασχηματισμού των μεταβλητών του προβλήματος. Εάν υπολογιστεί η οριζόντια συνιστώσα της ώθησης, τότε πράγματι για $\varphi = \delta = 0$ προκύπτει η υδροστατική δύναμη ($K_\gamma = 1$), όπως φαίνεται από τις καμπύλες των Σχ. 4.43 έως 4.44.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των Kerisel & Absi (1990), Chen & Liu (1990) και Mylonakis et al. (2007), επιδεικνύουν την αναμενόμενη συμπεριφορά. Παρατηρείται ταύτιση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου με αυτά των Kerisel & Absi, για όλες σχεδόν τις περιπτώσεις. Εξαιρέση αποτελούν οι περιπτώσεις $\delta = 0$, $\beta/\varphi = 1$, $\omega = 0$ στις ενεργητικές ωθήσεις και $\delta=0$, $\beta/\varphi = 0$, $\omega = 30^\circ$ σε ενεργητικές και παθητικές, όπου παρατηρείται εμφανής απόκλιση των αποτελεσμάτων. Στις περιπτώσεις αυτές η γωνία της ζώνης Rankine θ_A γίνεται μικρότερη από τη γωνία του τοίχου, ω και η γωνία περιστροφής του ριπιδίου γίνεται αρνητική με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ουσιαστικά η ζώνη Rankine του επιχώματος και η προτεινόμενη λύση να ισχύει μόνο προσεγγιστικά.

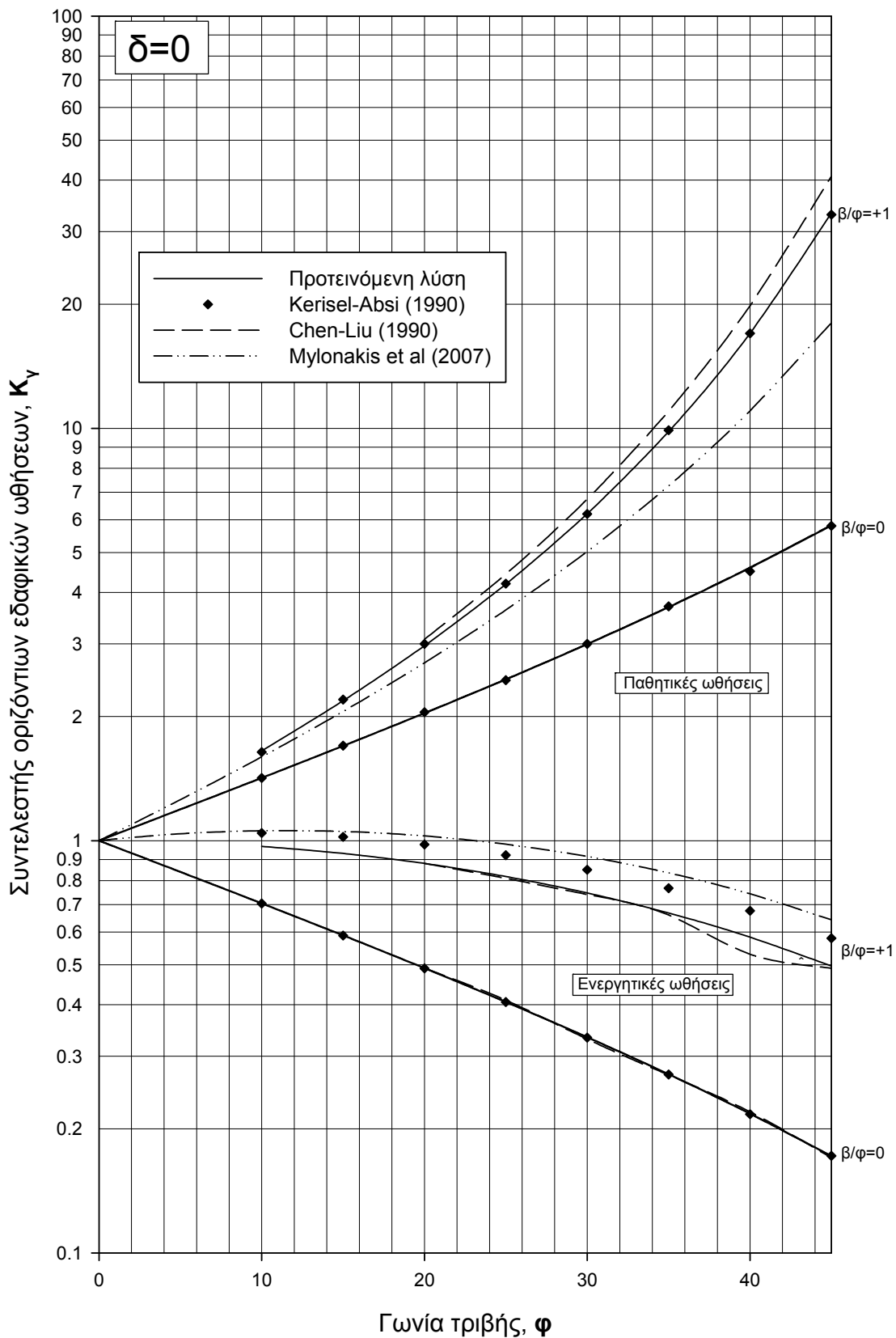
Οι συγκρίσεις με τις υπόλοιπες λύσεις της οριακής ανάλυσης είναι επίσης αναμενόμενες. Τα αποτελέσματα της λύσης άνω ορίου Chen & Liu (1990) είναι πάντοτε μη ασφαλή και υποεκτιμούν τις ενεργητικές ωθήσεις, ενώ υπερεκτιμούν τις παθητικές. Το αντίθετο συμβαίνει με τα αποτελέσματα της λύσης κάτω ορίου των Mylonakis et al. (2007) τα οποία είναι πάντοτε προς την πλευρά της ασφαλείας. Οι τιμές της τελευταίας λύσης στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να αξιολογηθούν ως υπερσυντηρητικές, ιδιαίτερος στις παθητικές συνθήκες. Γενικά, η απόκλισή τους από τις ακριβείς τιμές μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η γωνία της μεταβατικής ζώνης Boussinesq, ως συνέπεια του προσεγγιστικού εκθετικού ριπιδίου που χρησιμοποιείται.



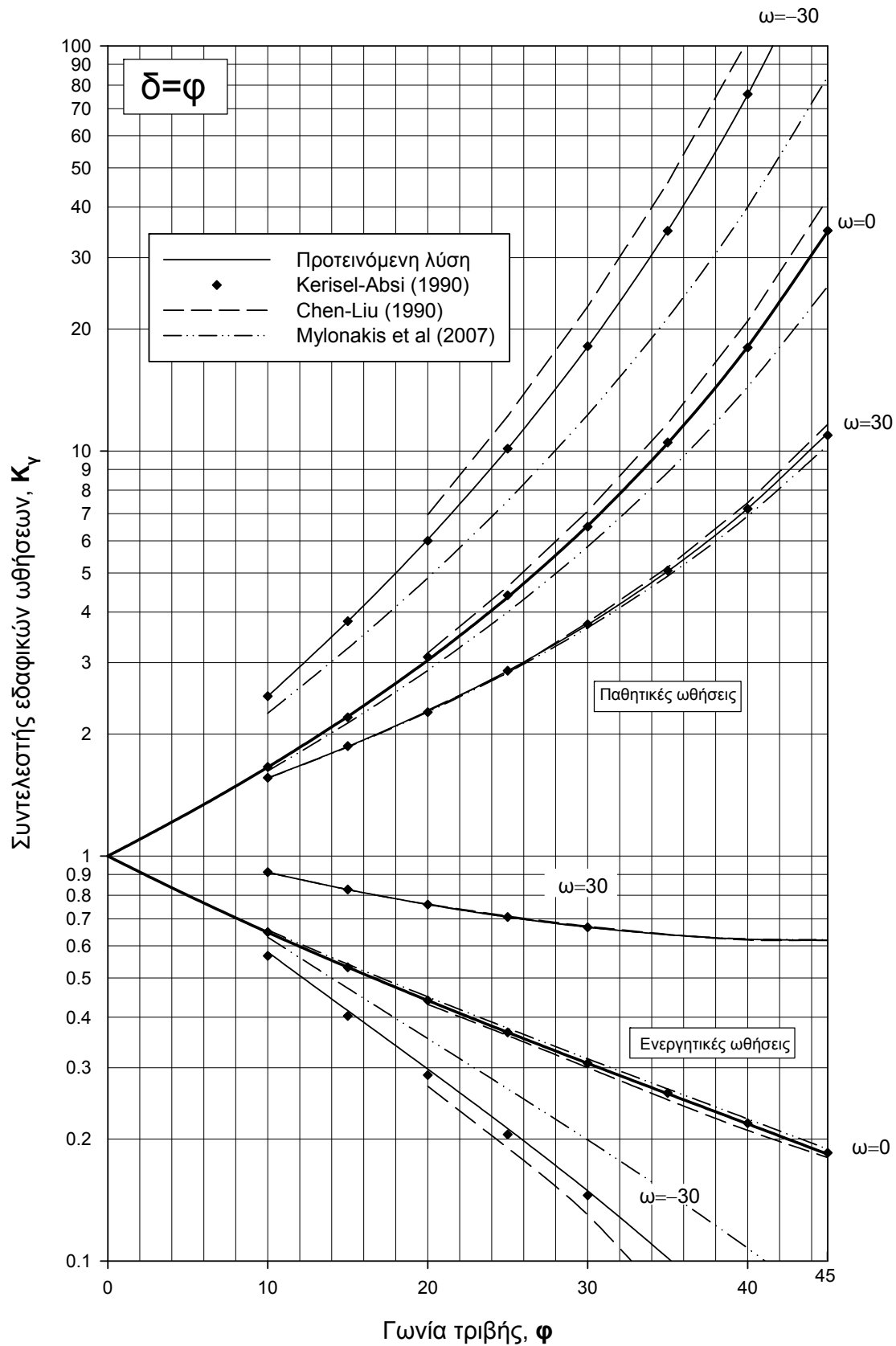
Σχήμα 4.37 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο ($\beta = 0$), κεκλιμένο επίχωμα ($\beta = \varphi$) και απόλυτα τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$)



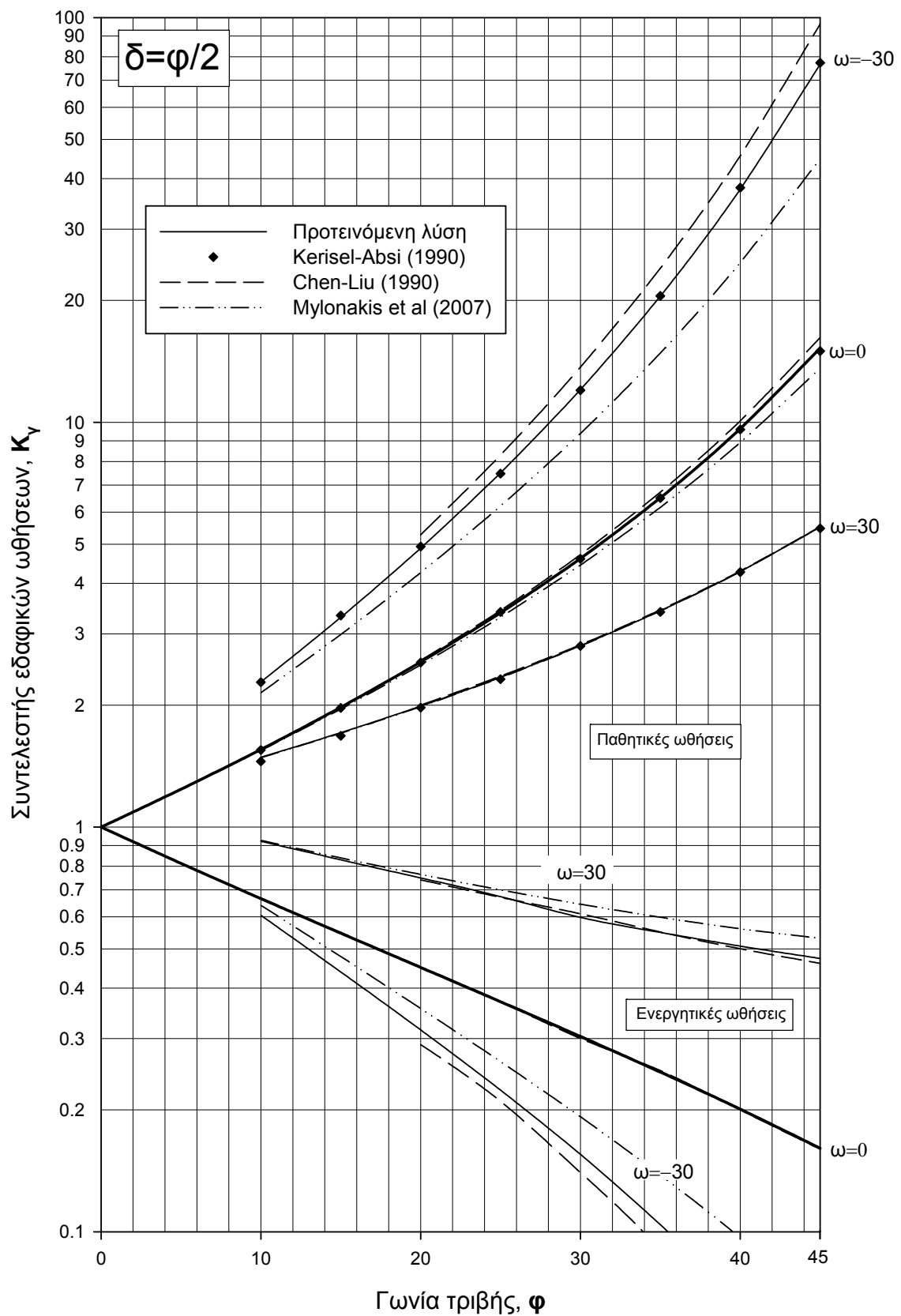
Σχήμα 4.38 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο ($\beta = 0$) και κεκλιμένο επίχωμα ($\beta = \varphi$) και τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi/2$)



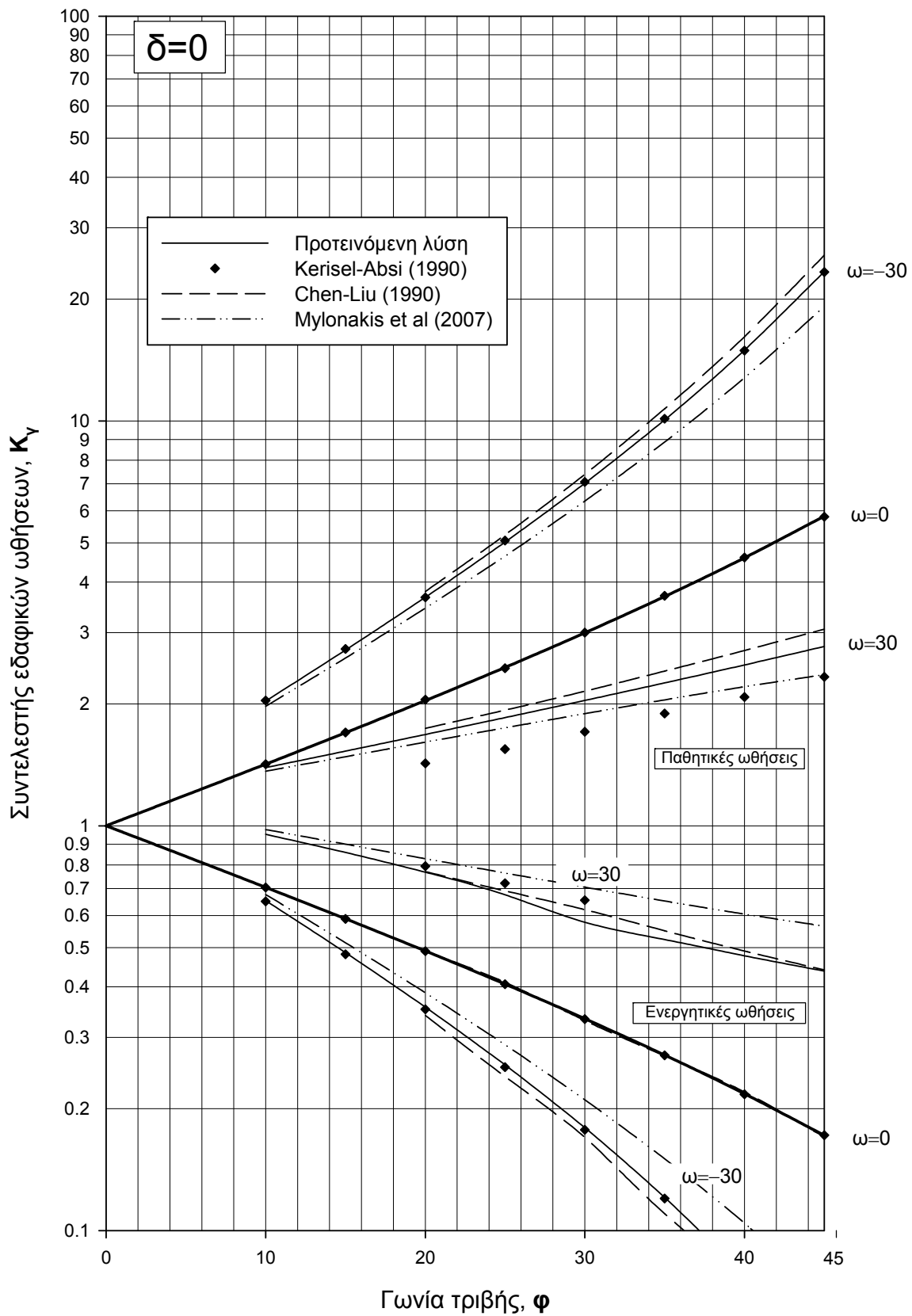
Σχήμα 4.39 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο ($\beta = 0$) και κεκλιμένο επίχωμα ($\beta = \varphi$) και λείο τοίχο ($\delta = 0$)



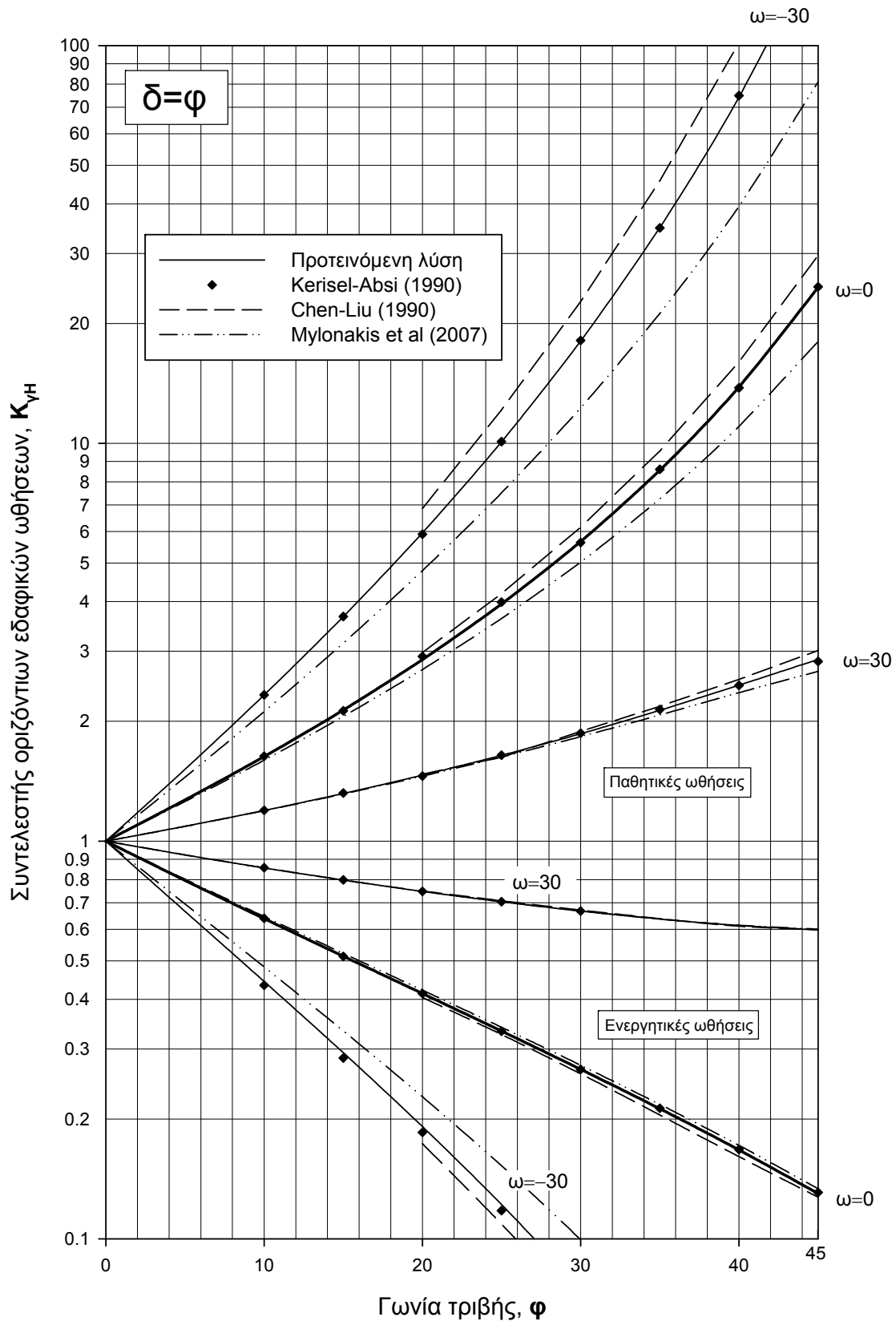
Σχήμα 4.40 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$)



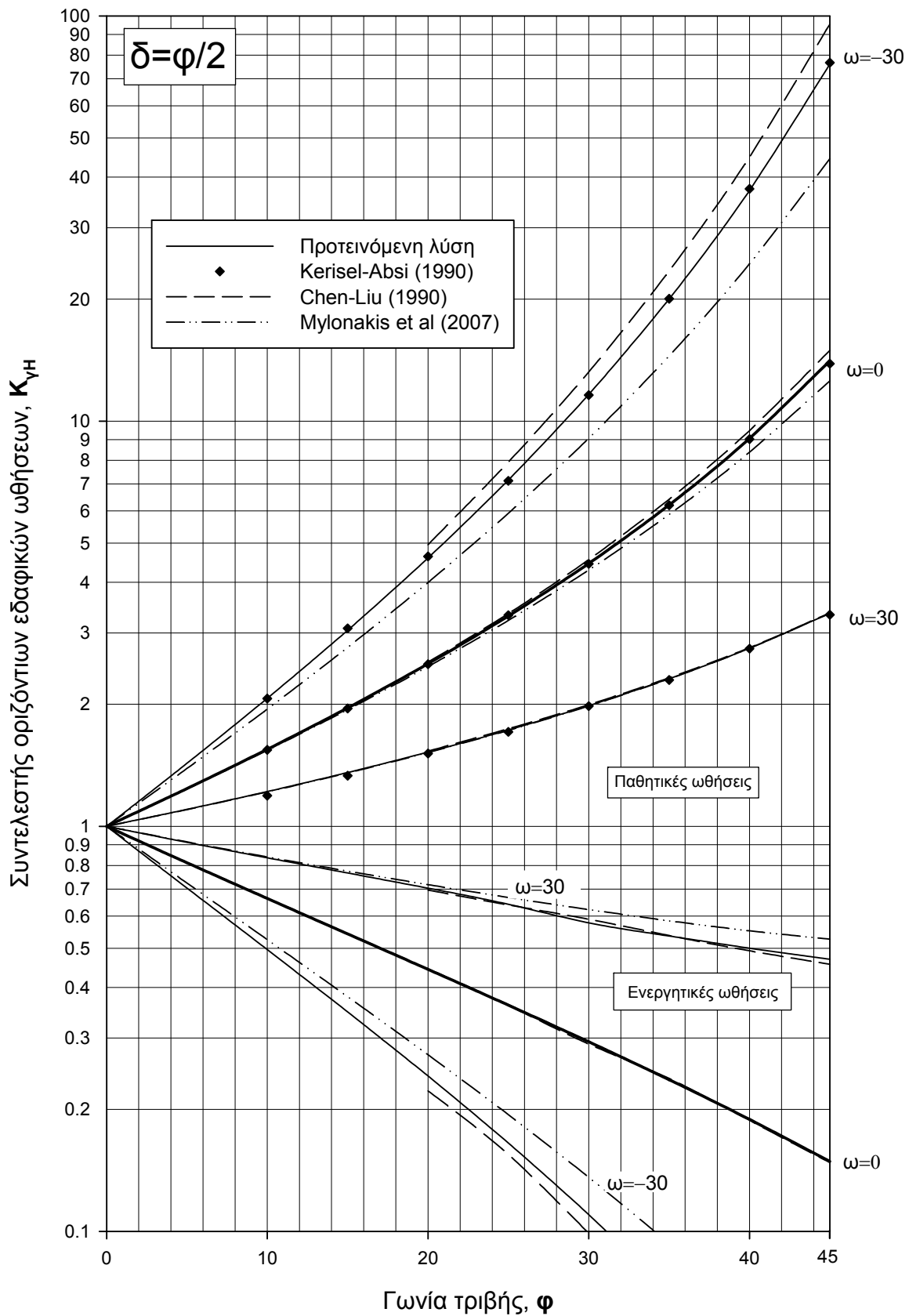
Σχήμα 4.41 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής ϕ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, τραχύ τοίχο ($\delta = \phi/2$)



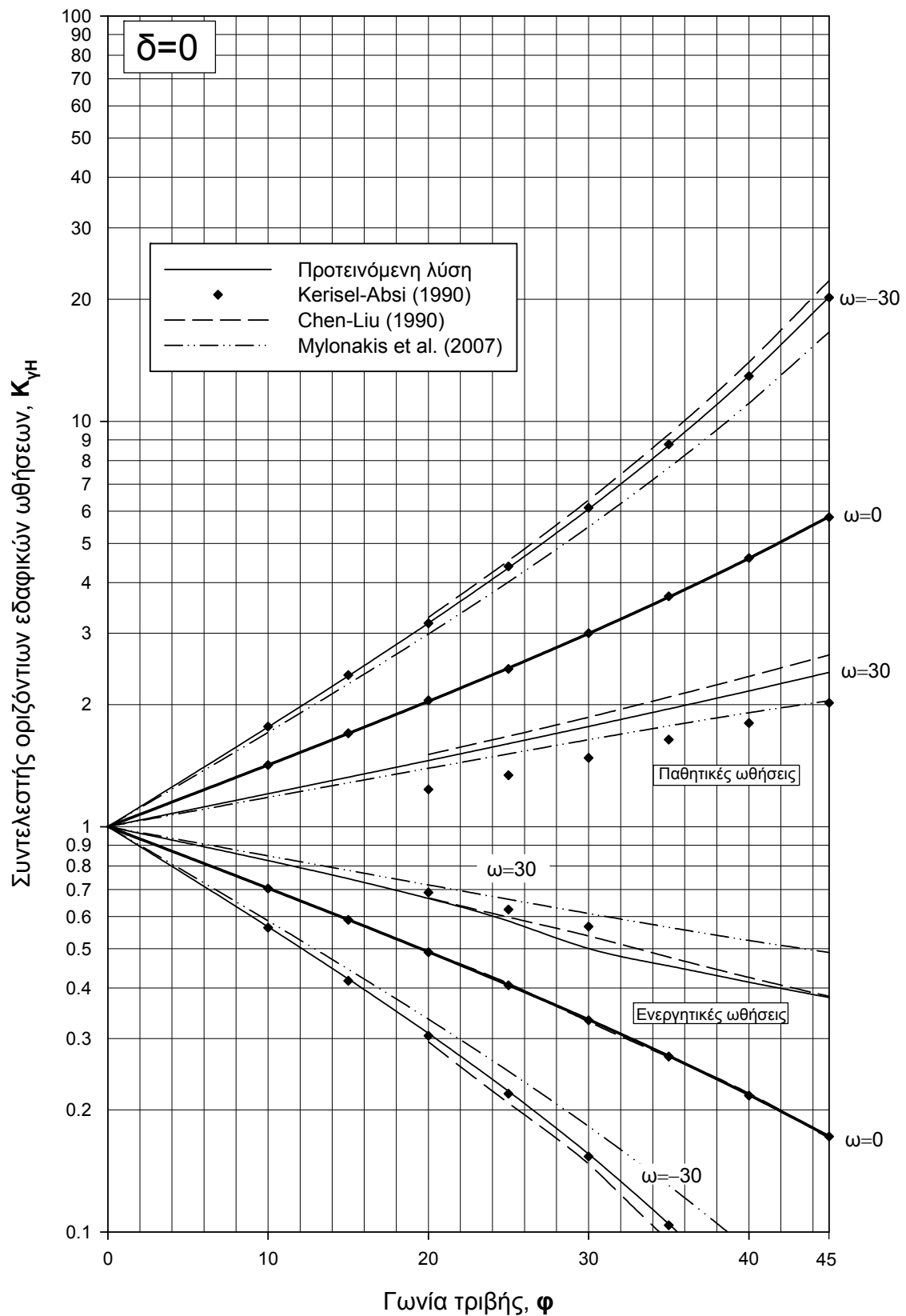
Σχήμα 4.42 Συγκρίσεις ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής ϕ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, λείο τοίχο ($\delta = 0$)



Σχήμα 4.43 Συγκρίσεις οριζόντιων ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$)



Σχήμα 4.44 Συγκρίσεις οριζόντιων ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi/2$)



Σχήμα 4.45 Συγκρίσεις οριζόντιων ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων σαν συνάρτηση της γωνίας τριβής φ , για επίπεδο επίχωμα ($\beta = 0$) και κεκλιμένο, λείο τοίχο ($\delta = 0$)

4.4.2 Συγκρίσεις σεισμικών ωθήσεων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου υπό σεισμικές συνθήκες για τρεις διαφορετικές τραχύτητες τοίχου: $\delta = \varphi$, $\delta = \varphi/2$ και $\delta = 0$, για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (α) Κατακόρυφος τοίχος και πρηνές γωνίας β .
- (β) Οριζόντιο πρηνές και τοίχος κλίσης ω ως προς την κατακόρυφη.

Αρχικά στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζεται μια σύγκριση τιμών από διάφορες μεθόδους για σεισμικές παθητικές ωθήσεις σε κατακόρυφο λείο και τραχύ τοίχο ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi$) και οριζόντιο επίχωμα με $\varphi = 30^\circ$ και $\varphi = 40^\circ$. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των λύσεων των Cheng (2003) Kumar & Chitikela (2002) της μεθόδου των χαρακτηριστικών και επίσης των λύσεων άνω ορίου Kumar (2001) και Soubra (2000) με μηχανισμό λογαριθμικής σπείρας και πολυπρισματικό μηχανισμό αντίστοιχα. Η συμφωνία με τις δύο πρώτες λύσεις είναι εξαιρετική, ενώ οι επόμενες δύο φυσιολογικά παράγουν μεγαλύτερες τιμές, ειδικά για την περίπτωση $\delta = \varphi$. Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου έχουν προκύψει από την επαναληπτική μέθοδο της υποενότητας 4.4.2 για μόλις 100 σημεία διακριτοποίησης. Παρατηρείται ότι είναι καλύτερα άνω όρια από τη λύση του Cheng (2003) που έχει προκύψει από πυκνό κάρναβο πλευράς 10^{-5} m (500 φορές πυκνότερη διακριτοποίηση σε τόξο που αντιστοιχεί σε ακτίνα αναφοράς 1m).

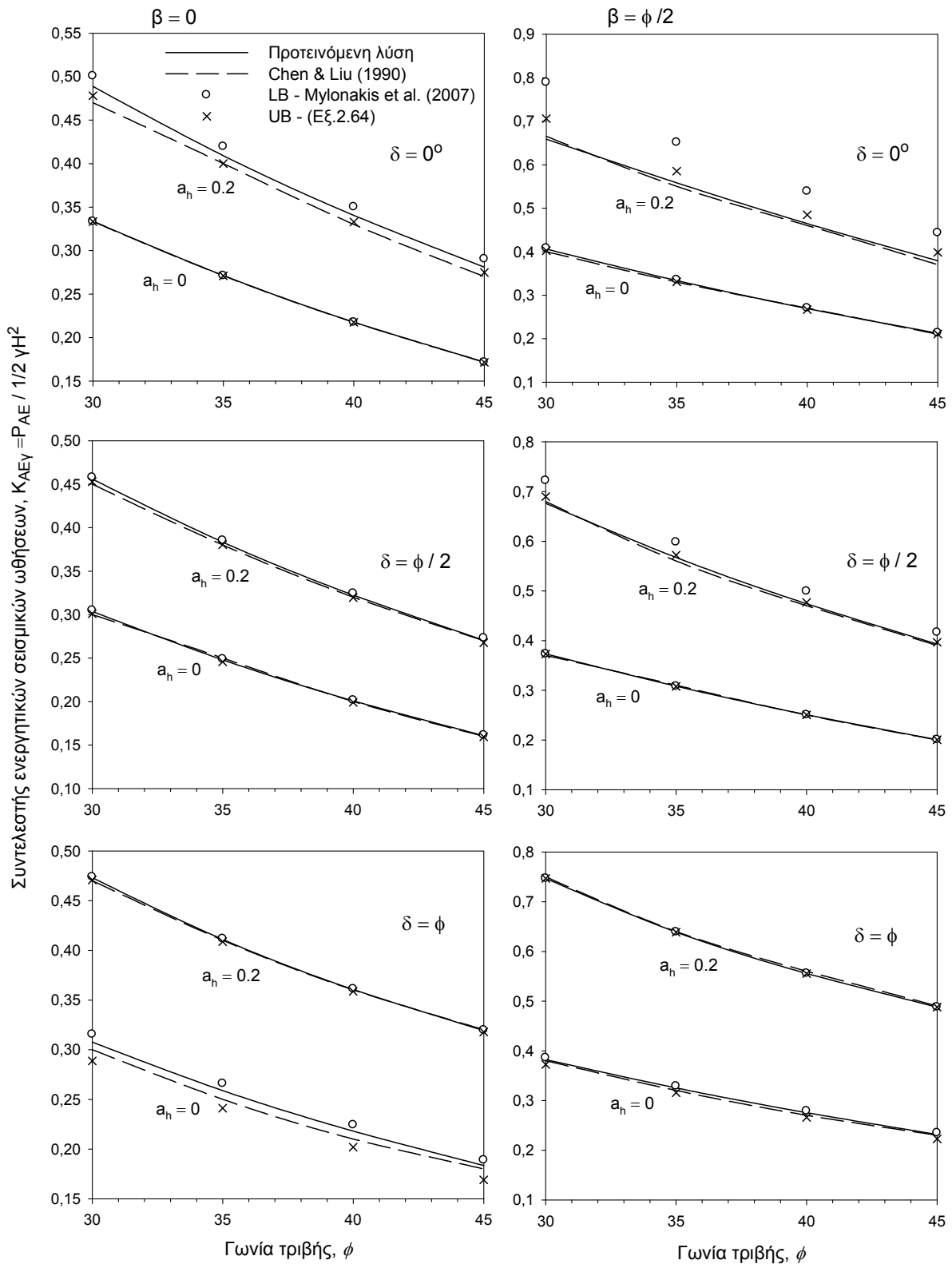
Στα Σχ. 4.46 και 4.47 συγκρίνονται αποτελέσματα ενεργητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής φ , για διάφορες κλίσεις του επιχώματος και του τοίχου και για σεισμικό συντελεστή $a_h = 0$ και 0.2. Η συμφωνία των διαφόρων λύσεων είναι αρκετά καλή με την προσεγγιστική λύση κάτω ορίου Mylonakis et al. (2007) να είναι πάντοτε συντηρητική και τη λύση Chen & Liu (1990) να υποεκτιμά τις ενεργητικές ωθήσεις. Η λύση οριακής ισορροπίας της Εξ. (2.64) δίνει βελτιωμένες προβλέψεις, που βρίσκονται πιο κοντά στις ακριβείς τιμές. Η συμφωνία των λύσεων διαταράσσεται μόνο στις περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε αρνητική γωνία περιστροφής του ριπιδίου των τάσεων (Σχ. 4.47 για $\omega = 30$) για τις οποίες θεωρητικά δεν ισχύει ούτε η προτεινόμενη λύση, ούτε οι Εξ. (2.11) και (2.64). Σε αυτήν την περίπτωση η λύση Chen & Liu δίνει πιο αξιόπιστες προβλέψεις.

Τέλος, στα Σχ. 4.48 έως 4.55 συγκρίνονται αποτελέσματα παθητικών ωθήσεων για διάφορους συνδυασμούς παραμέτρων και συγκεκριμένα της γωνίας τριβής φ , των κλίσεων του επιχώματος και του τοίχου και του σεισμικού συντελεστή a_h . Στις παθητικές ωθήσεις τα αποτελέσματα της προτεινόμενης λύσης αντιπροσωπεύουν πάντοτε τις ακριβείς τιμές.

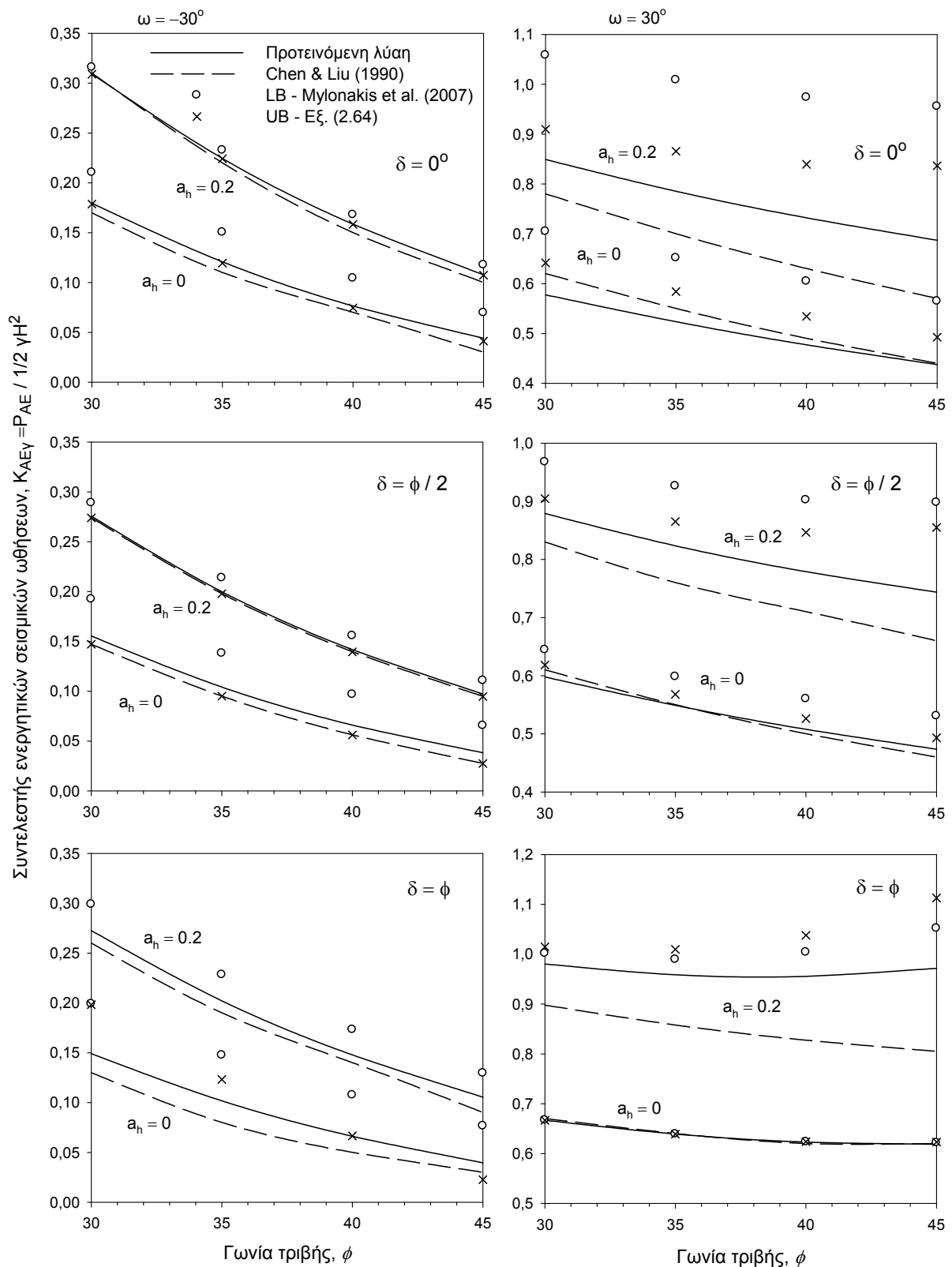
Η λύση κάτω ορίου των Mylonakis et al. (2007) είναι αρκετά συντηρητική, ενώ πολύ κοντά στις ακριβείς τιμές απεικονίζονται τα αποτελέσματα της λύσης Οριακής Ισορροπίας του Κεφαλαίου 2 (Εξ. 2.64), με εξαίρεση την περίπτωση $\delta = \varphi$ για την οποία αποτελεί χειρότερο άνω όριο από τη λύση Chen & Liu (1990). Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι διατηρεί πάντοτε περίπου ίση και αντίθετη απόκλιση από τις ακριβείς τιμές, σε σχέση με τη λύση των Mylonakis et al. (2007), κάτι που καθιστά πολύ ενδιαφέρουσα την ιδέα ενός μέσου όρου των δύο λύσεων (βλ. Κεφάλαιο 5). Φυσιολογικά, τα αποτελέσματα όλων των λύσεων δείχνουν μείωση της κρίσιμης παθητικής ώθησης με την αύξηση του σεισμικού συντελεστή, εκτός της οριακής περίπτωσης $\beta = \varphi$, για την οποία υπάρχει ελαφρά αύξηση.

Πίνακας 4.1 Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για σεισμικές παθητικές ωθήσεις από διάφορες μεθόδους σε κατακόρυφο λείο και τραχύ τοίχο ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi$) και οριζόντιο επίχωμα με $\varphi = 30^\circ$ και $\varphi = 40^\circ$ (τροποποιημένο από Cheng, 2003)

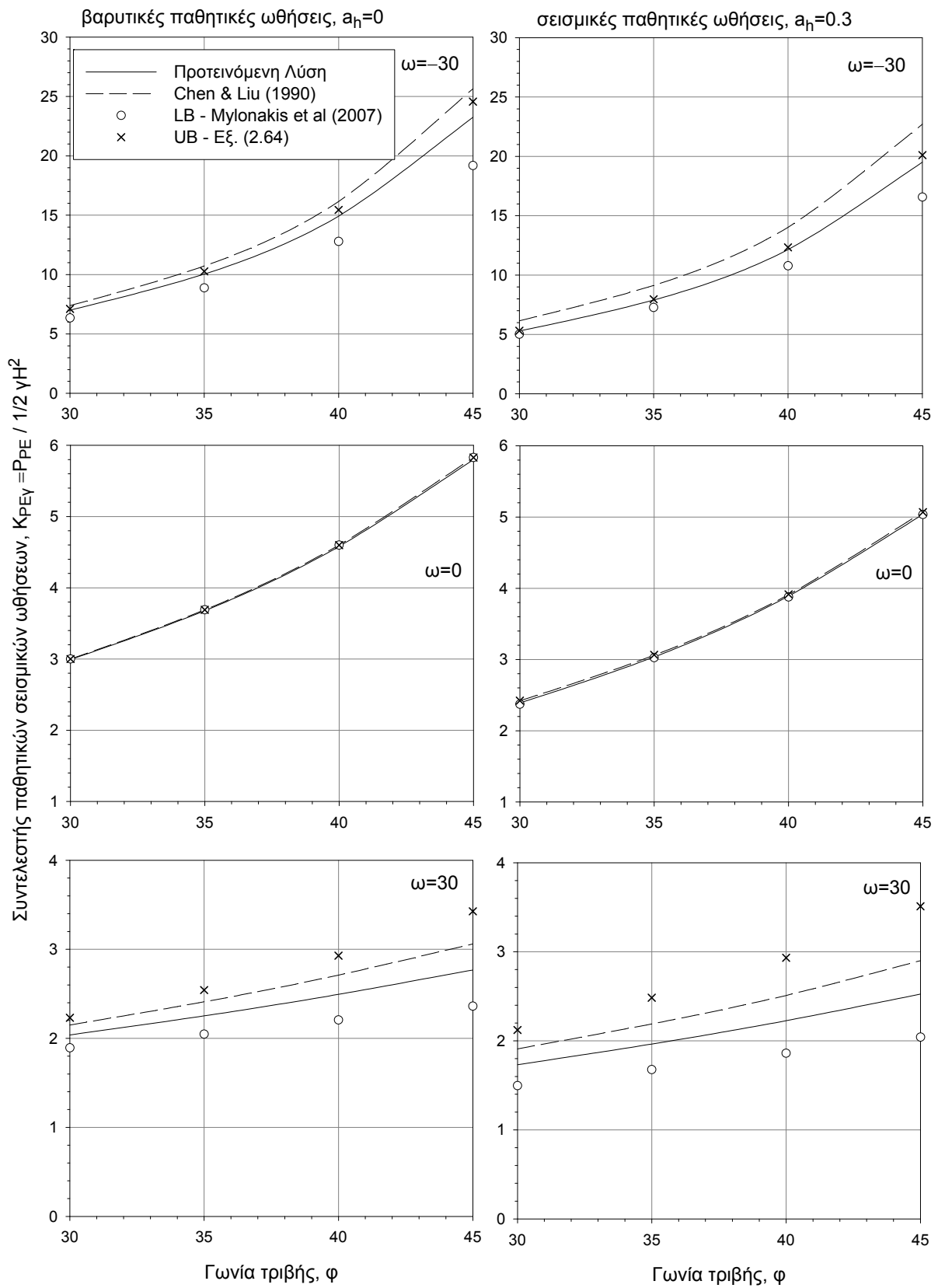
δ	φ (°)	a_h	Προτεινόμενη λύση	Γραμμές Ολίσθησης		Οριακή Ισορροπία		
				Cheng (2003)	Kumar & Chitikela (2002)	Kumar (2001)	Soubra (2000)	
$\delta = 0^\circ$	30°	0	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	
		0,1	2,819	2,821	2,817	2,821	2,820	
		0,2	2,618	2,621	2,610	2,618	2,630	
		0,3	2,392	2,394	2,374	2,393	2,420	
		0,4	2,127	2,130	2,096	2,128	-	
		0,5	1,786	1,792	1,738	1,787	-	
	40°	0	4,599	4,599	4,590	4,599	4,600	
		0,1	4,379	4,381	4,377	4,400	4,380	
		0,2	4,144	4,146	4,138	4,148	4,150	
		0,3	3,894	3,897	3,880	3,894	3,910	
		0,4	3,624	3,627	3,598	3,624	-	
		0,5	3,327	3,333	3,286	3,328	-	
	$\delta = \varphi^\circ$	30°	0	6,549	6,556	6,563	6,677	6,860
			0,1	6,076	6,084	6,083	6,187	6,350
0,2			5,561	5,566	5,562	5,655	5,790	
0,3			4,990	4,996	4,986	5,065	5,170	
0,4			4,335	4,343	4,327	4,390	-	
0,5			3,511	3,526	3,501	3,545	-	
40°		0	18,131	18,150	18,186	18,863	19,620	
		0,1	17,088	17,106	17,131	17,736	18,460	
		0,2	15,992	16,011	16,002	16,607	17,230	
		0,3	14,833	14,853	14,852	15,385	15,940	
		0,4	13,597	13,619	13,606	14,082	-	
		0,5	12,261	12,287	12,260	12,677	-	



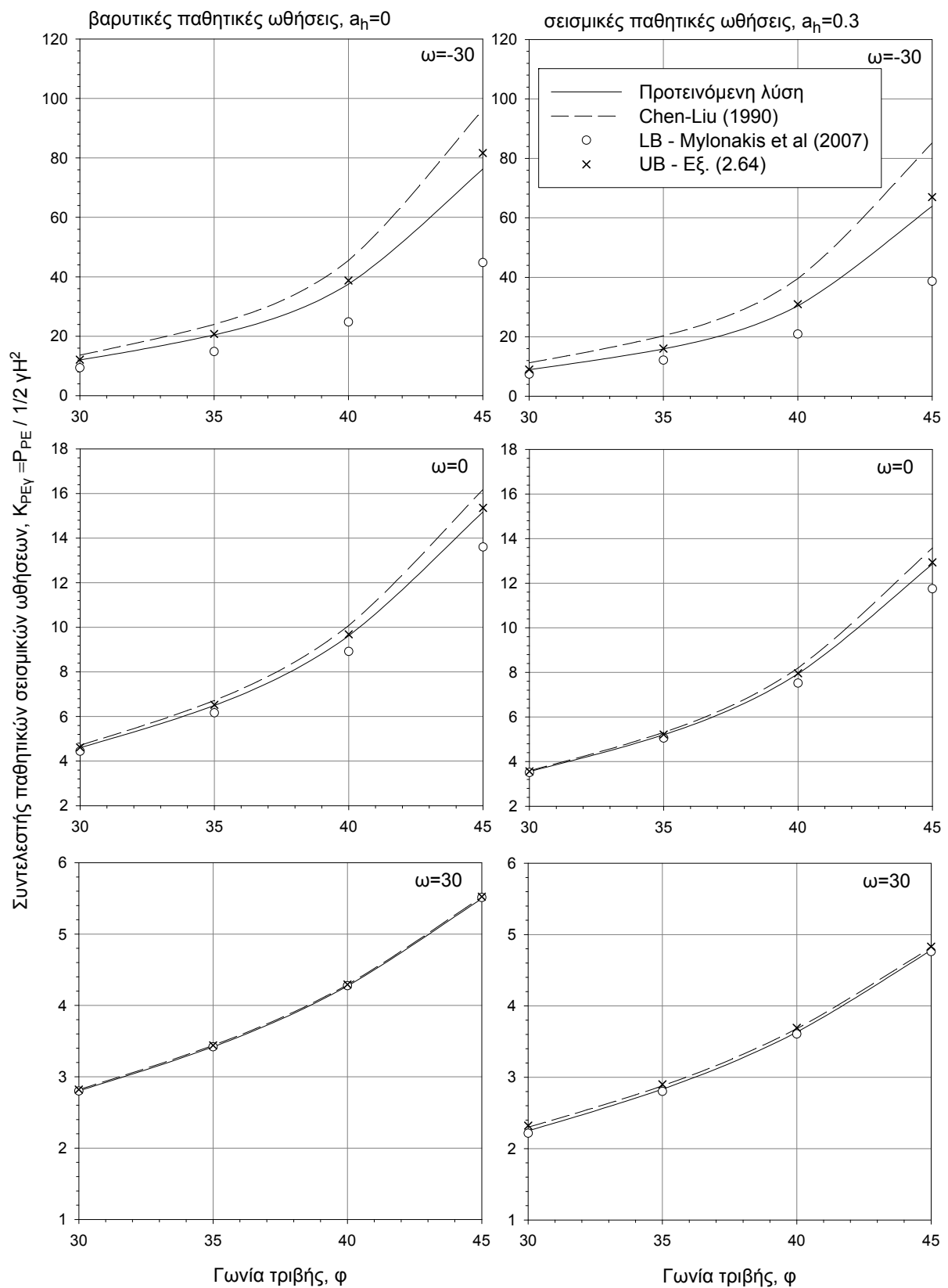
Σχήμα 4.46 Συγκρίσεις σεισμικών ενεργητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για επίπεδο και κεκλιμένο επίχωμα ($\beta = 0$ και $\beta = \phi/2$), διάφορες τραχύτητες τοίχου και σεισμό $a_h = 0$ και 0.2



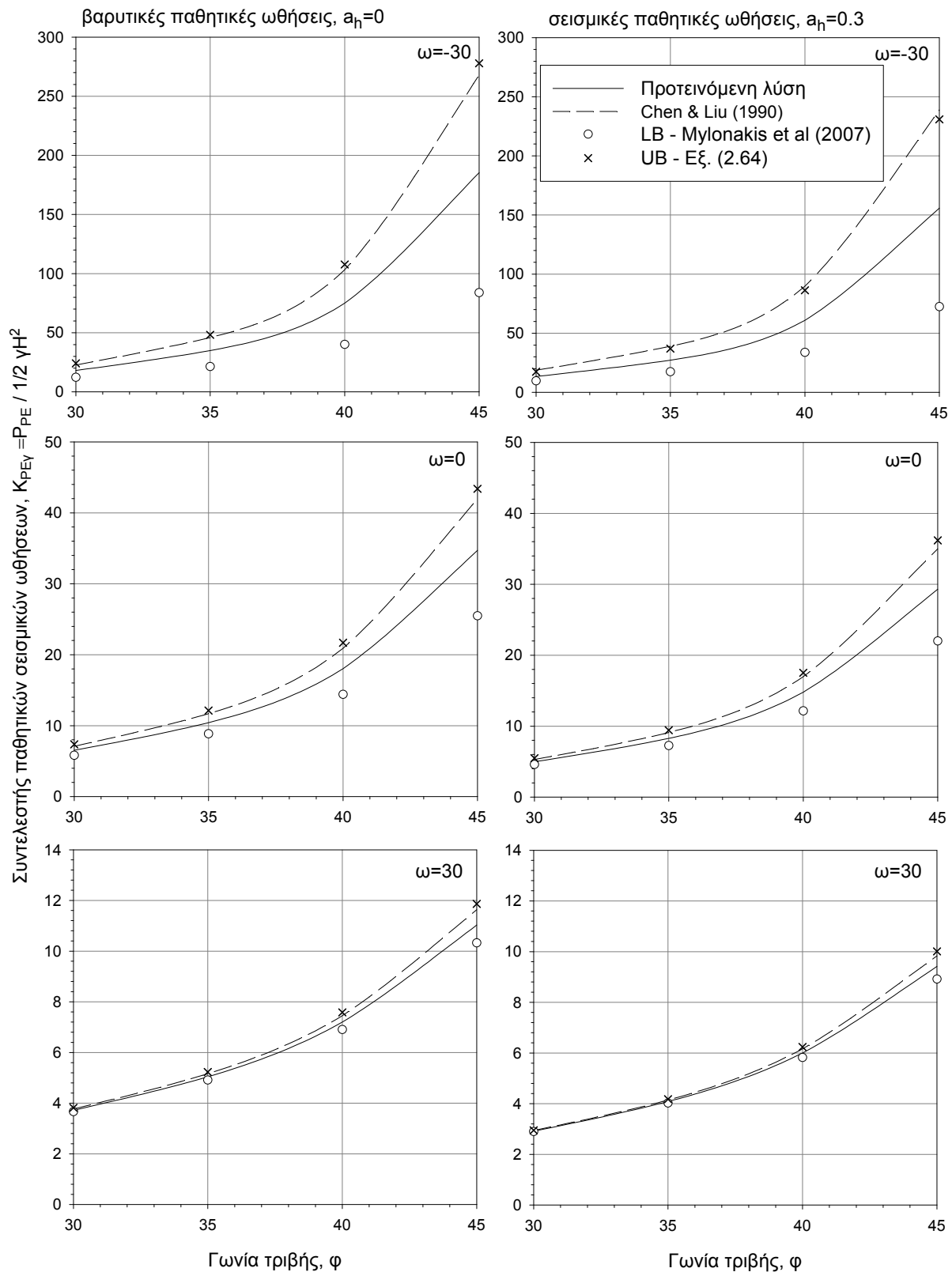
Σχήμα 4.47 Συγκρίσεις σεισμικών ενεργητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για οριζόντιο επίχωμα, διάφορες κλίσεις και τραχύτητες τοίχου και σεισμό $a_h = 0$ και 0.2



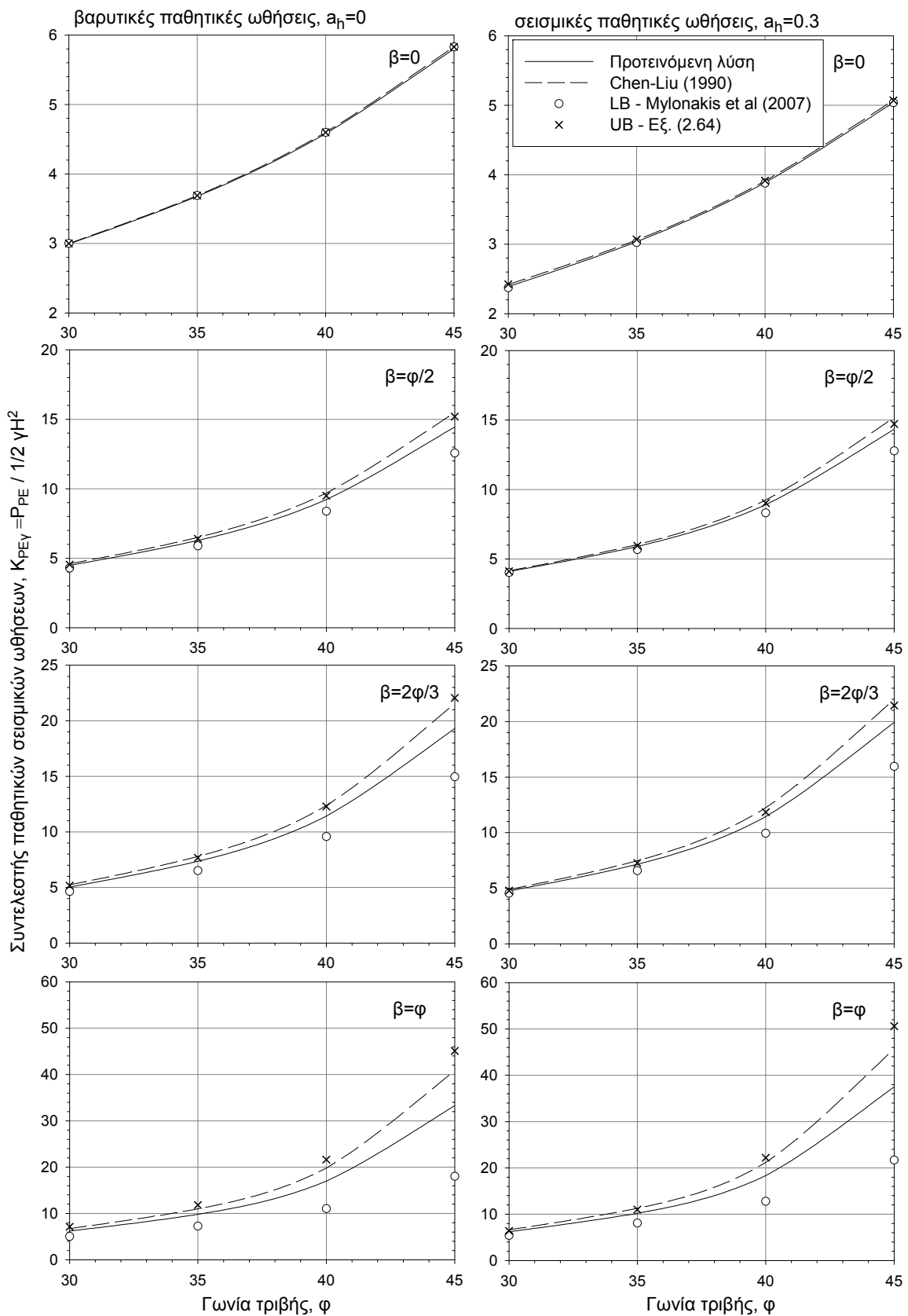
Σχήμα 4.48 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για οριζόντιο επίχωμα, λείο τοίχο ($\delta = 0$) με διάφορες κλίσεις και σεισμό $a_h = 0$ και 0.3



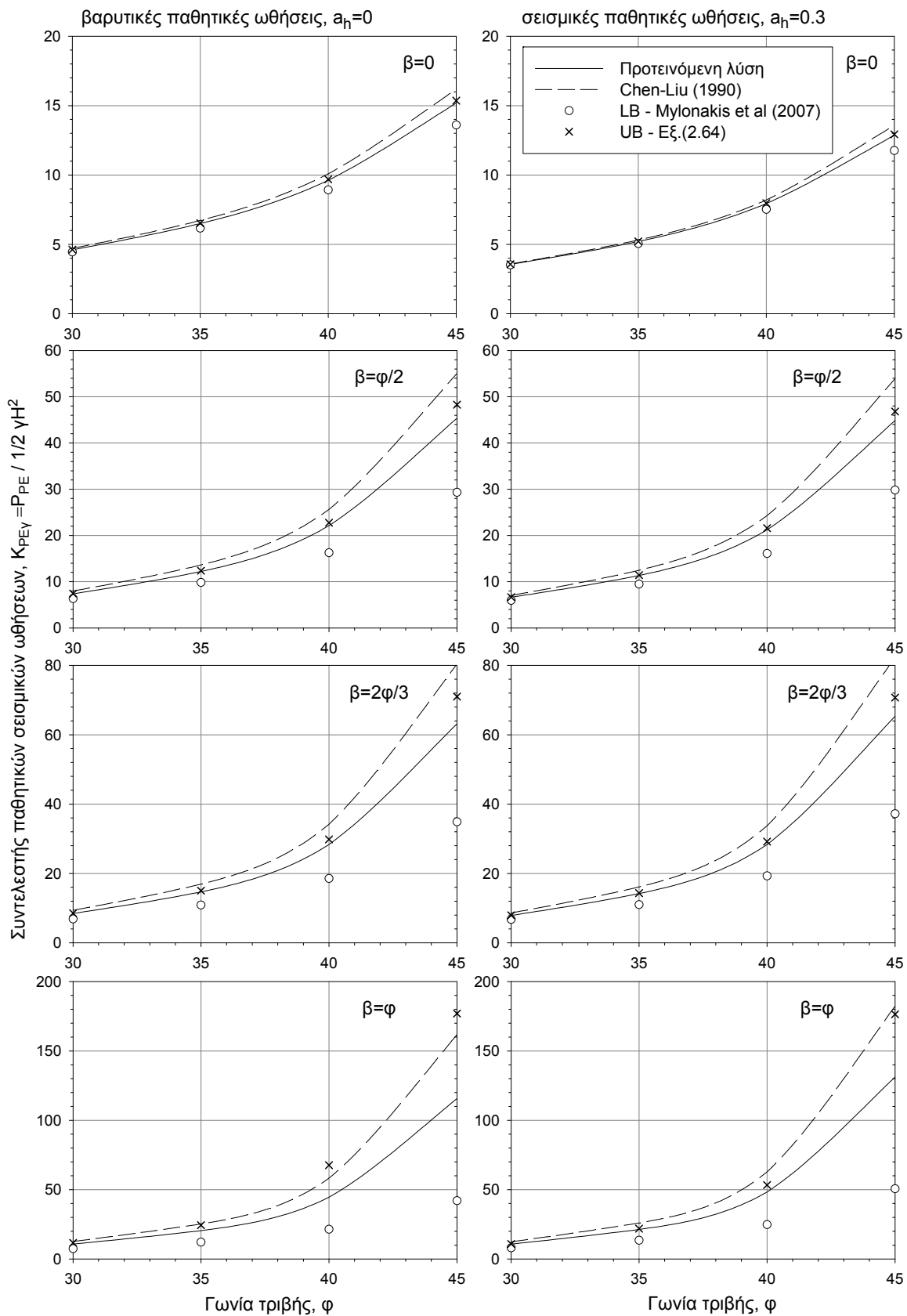
Σχήμα 4.49 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για οριζόντιο επίχωμα, τραχύ τοίχο ($\delta = \phi/2$) με διάφορες κλίσεις και σεισμό $a_h = 0$ και 0.3



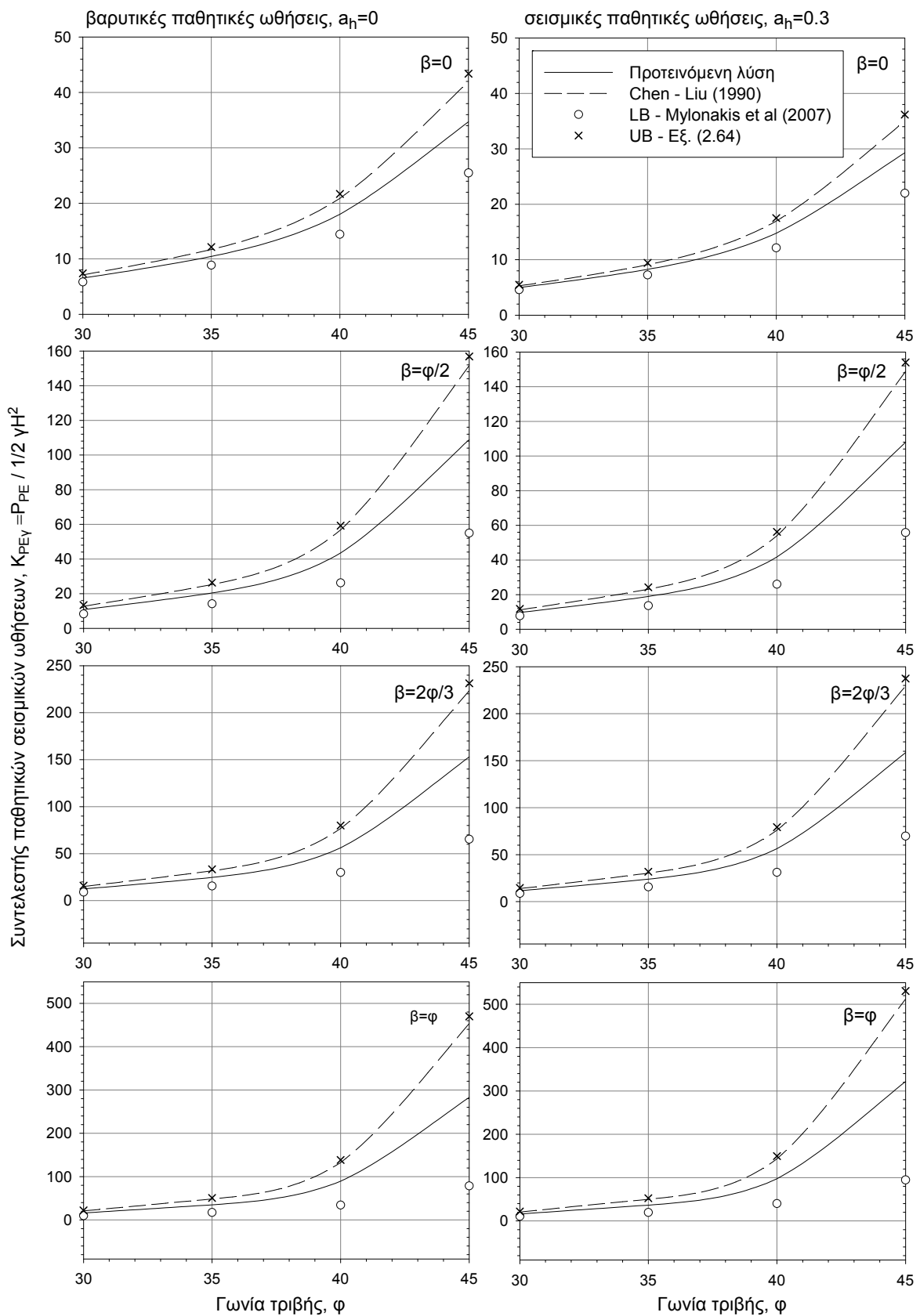
Σχήμα 4.50 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για οριζόντιο επίχωμα, τραχύ τοίχο ($\delta = \phi$) με διάφορες κλίσεις και σεισμό $a_h = 0$ και 0.3



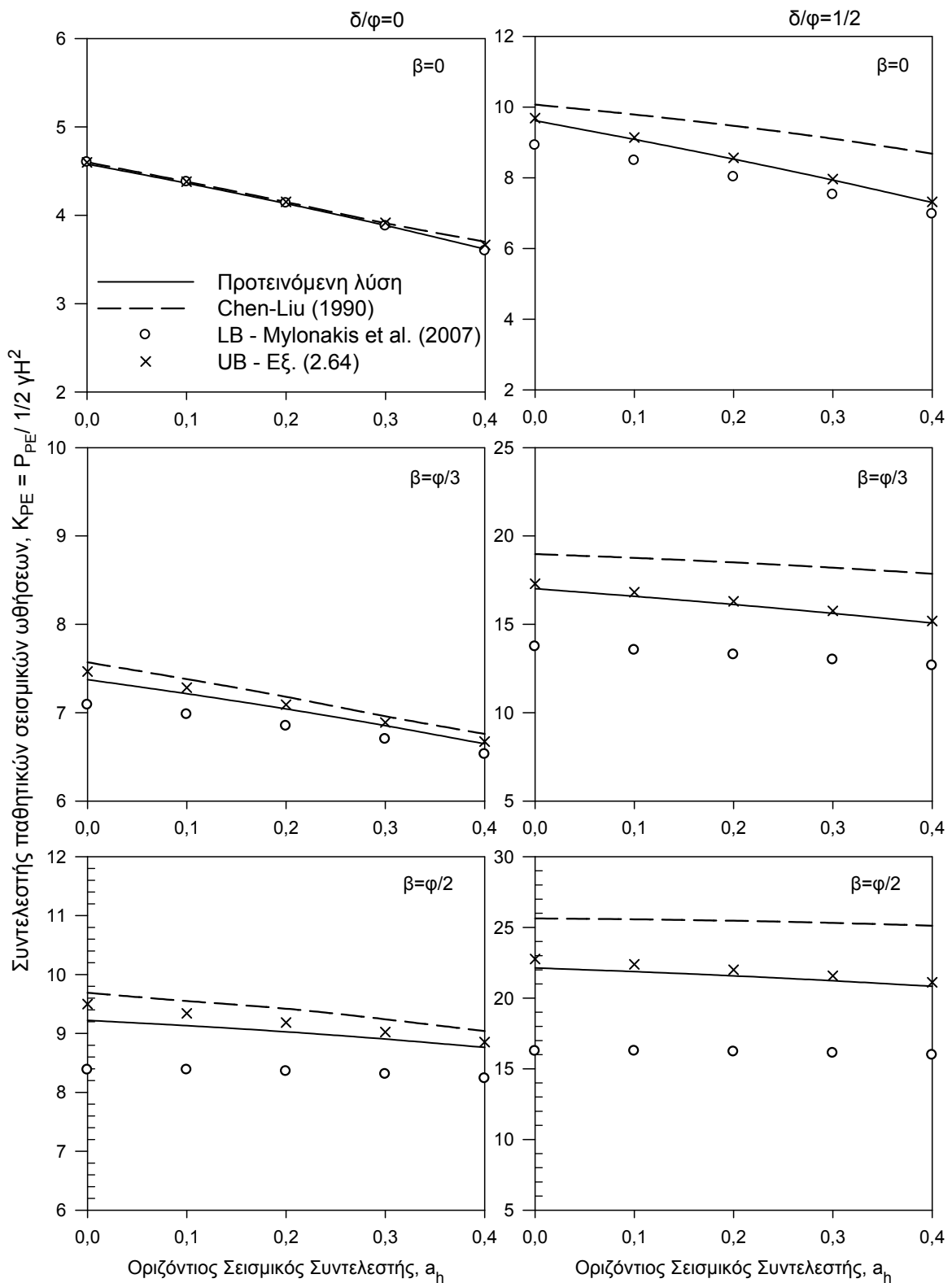
Σχήμα 4.51 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής φ , για διάφορες κλίσεις επιχώματος, κατακόρυφο λείο τοίχο ($\delta = 0$) και σεισμό $a_h = 0$ και 0.3



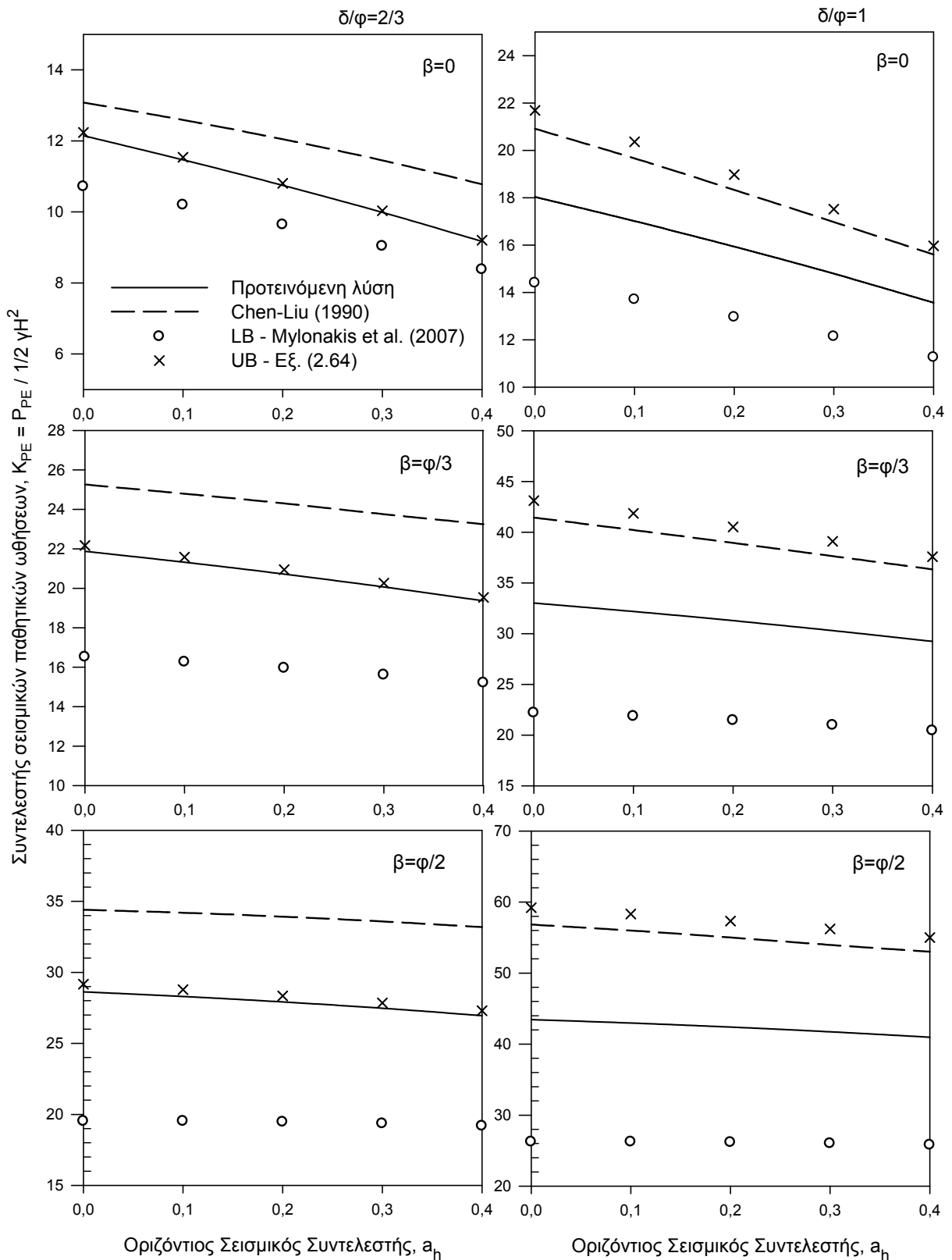
Σχήμα 4.52 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για διάφορες κλίσεις επιχώματος, κατακόρυφο τραχύ τοίχο ($\delta = \phi/2$) και σεισμό $\alpha_h = 0.3$



Σχήμα 4.53 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει της γωνίας τριβής ϕ , για διάφορες κλίσεις επιχώματος, κατακόρυφο τραχύ τοίχο ($\delta = \phi$) και σεισμό $a_h = 0.3$



Σχήμα 4.54 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει του σεισμικού συντελεστή a_h , για διάφορες κλίσεις επιχώματος, τραχύτητες τοίχου ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi/2$) και γωνία τριβής $\varphi = 40^\circ$



Σχήμα 4.55 Συγκρίσεις σεισμικών παθητικών ωθήσεων συναρτήσει του σεισμικού συντελεστή a_h , για διάφορες κλίσεις επιχώματος, τραχύτητες τοίχου ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi/2$) και γωνία τριβής $\varphi = 40^\circ$

4.6 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε μια νέα προσέγγιση οριακής ανάλυσης τάσεων, συμβατή με το θεώρημα κάτω ορίου για το πρόβλημα βαρυτικών και σεισμικών ωθήσεων γαιών σε τοίχους βαρύτητας. Πρόκειται για μια εναλλακτική μέθοδο επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας και του κριτηρίου αστοχίας, το οποίο παραδοσιακά αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης (slip line method) (Kötter, 1903; Caquot & Kerisel, 1948; Sokolovskii, 1965; Kerisel & Absi, 1990; Kumar & Chitikela, 2002; Cheng, 2003). Τόσο με τη δημοφιλή μέθοδο των χαρακτηριστικών, όσο και με άλλες εναλλακτικές τεχνικές ολοκλήρωσης του συστήματος των εξισώσεων (von Karman, 1927; Caquot, 1934; Martin, 2005) παράγεται ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με συνήθεις ή μερικές παραγώγους, το οποίο επιλύεται αριθμητικά. Ο προσανατολισμός του ερευνητικού ενδιαφέροντος στις μεθόδους των χαρακτηριστικών γραμμών δεν είναι τυχαίος αλλά προϊόν επιρροής των κλασσικών κινηματικών μεθόδων, οι οποίες επικεντρώνουν στην εύρεση του κρίσιμου μηχανισμού αστοχίας.

Στην παρούσα εργασία ακολουθείται μια διαφορετική θεώρηση η οποία αρχικά απλοποιεί το πρόβλημα σε μία μόνο διαφορική εξίσωση (μη-γραμμική με μερικές παραγώγους) με χρήση της συνάρτησης δυναμικού (Airy, 1862), την οποία στη συνέχεια μετατρέπει σε συνήθη, κάνοντας χρήση της εγγενούς (για τον τοίχο απείρου ύψους) ιδιότητας της αυτοομοιότητας που παρουσιάζει το πρόβλημα όταν εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες. Η συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή θ , επιλύεται αριθμητικά σε δύο εναλλακτικές μορφές: την αυθεντική μη-γραμμική και μια γραμμικοποιημένη μορφή που επιτυγχάνεται με τη εισαγωγή της συνάρτησης κλίσης $f(\theta)$ (Azarou, 1975). Η προτεινόμενη διαδικασία εμφανίζει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

(1) Καταλήγει σε μία και μοναδική συνήθη διαφορική εξίσωση που επιτρέπει ευκολότερη αριθμητική επίλυση σε σχέση με το σύστημα των δύο εξισώσεων. Η εξάρτηση του προβλήματος μόνο από τη μεταβλητή θ , απαιτεί διακριτοποίηση ενός μόνο κυκλικού τόξου, σε αντίθεση με τον κάναβο των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούν οι λύσεις της μεθόδου των χαρακτηριστικών (βλ. Sokolovskii, 1965). Στην περίπτωση που η ιδιότητα αυτοομοιότητας δεν ισχύει και κάποια παράμετρος εξαρτάται από το βάθος (για παράδειγμα εδαφικό υλικό με μεταβλητές ιδιότητες ή συνοχή, ή χρησιμοποιηθεί μη γραμμικό κριτήριο αστοχίας, μεταβλητές δυνάμεις πεδίου κτλ.), τότε η διαφορική εξίσωση

του προβλήματος δεν μπορεί να απλοποιηθεί σε συνήθη και η αριθμητική επίλυση υποχρεωτικά πρέπει να πραγματοποιηθεί σε διδιάστατο κάναβο.

(2) Η γνώση της συνάρτησης δυναμικού παρέχει φυσική εποπτεία του προβλήματος και επιτρέπει τον υπολογισμό των τάσεων σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου – όχι μόνο κατά μήκος των γραμμών ολίσθησης. Επιπλέον συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της πολυπλοκότητας του προβλήματος και ανοίγει το δρόμο στην εφαρμογή, πέραν της αυστηρής αριθμητικής επίλυσης, προχωρημένων αναλυτικών ή απλοποιημένων ημιαναλυτικών μεθόδων. Μια μέθοδος αυτού του είδους παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο και βασίζεται σε επαναληπτική προσέγγιση της συνάρτησης κλίσης $f(\theta)$ στη γραμμικοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης, επιδεικνύοντας εξαιρετική σταθερότητα και ακρίβεια.

(3) Αν και η παρούσα μέθοδος δεν ασχολείται καθόλου με την κινηματική του προβλήματος και την εύρεση του μηχανισμού αστοχίας, η γνώση του τανυστή των τάσεων (μέσω της συνάρτησης δυναμικού) και η αντιστοίχισή του με τον τανυστή των παραμορφώσεων (κανόνας ροής), επιτρέπει τον αναλυτικό προσδιορισμό των γραμμών διαρροής.

(4) Από τις εκτεταμένες συγκρίσεις των αριθμητικών αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου με άλλες διαθέσιμες λύσεις προκύπτει ότι η προτεινόμενη μέθοδος οδηγεί σε αξιόπιστα και εξαιρετικής ακρίβειας αποτελέσματα, τόσο για τις βαρυτικές όσο και για τις σεισμικές ωθήσεις. Η συμφωνία με τα πλέον αξιόπιστα διαθέσιμα αριθμητικά αποτελέσματα για βαρυτικές (Kerisel-Absi 1990) και σεισμικές ωθήσεις (Kumar & Chitikela, 2002; Cheng, 2003) είναι εξαιρετική. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία η γωνία της ζώνης Rankine θ_A γίνεται μικρότερη από τη γωνία του τοίχου, ω και η γωνία περιστροφής του ριπιδίου γίνεται αρνητική. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται μόνο σε ενεργητικές συνθήκες και για συγκεκριμένους συνδυασμούς παραμέτρων (κυρίως με σεισμό). Στην περίπτωση αυτή ουσιαστικά δεν εμφανίζεται η ζώνη Rankine του επιχώματος και η λύση δεν ισχύει με τη μορφή που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα. Για την ακριβή επίλυση των συγκεκριμένων περιπτώσεων απαιτείται διακριτοποίηση και επίλυση ολόκληρης της εδαφικής μάζας ως μεταβατική ζώνη Boussinesq, από την ελεύθερη επιφάνεια μέχρι τον τοίχο.

(5) Η προσεγγιστική λύση κάτω ορίου (Εξ. 2.11 - Mylonakis et al., 2007) αποδεικνύεται αρκετά συντηρητική, ειδικά στις παθητικές ωθήσεις, παρά το γεγονός ότι δεν ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος κάτω ορίου της οριακής ανάλυσης.

Όπως αποδείχτηκε παραπάνω, το εκθετικό ριπίδιο των τάσεων ικανοποιεί μόνο το κριτήριο αστοχίας αλλά όχι την ισορροπία των τάσεων. Αντίθετα από την προσεγγιστική λύση κάτω ορίου, η συμπεριφορά της προσεγγιστικής λύσης άνω ορίου (Εξ. 2.64) είναι ικανοποιητική, η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στην ακριβή λύση για όλες σχεδόν τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στις παθητικές ωθήσεις, με εξαίρεση τις περιπτώσεις όπου $\delta = \varphi$ και $\beta = \varphi$, οπότε και συμπίπτει με την αρκετά συντηρητική Εξίσωση (2.45). Η τελευταία εντούτοις, παρότι πάντοτε συντηρητική, μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη, ως το άνω εκείνο όριο, του οποίου ο μέσος όρος με το συντηρητικό κάτω όριο της (Εξ. 2.11) (Mylonakis et al, 2007) να δίνει πρακτικώς ακριβείς τιμές. Στις ενεργητικές ωθήσεις, και αυτές οι λύσεις εμφανίζουν προβλήματα στην περίπτωση που αναφέρθηκε στο σημείο (4) (αρνητική γωνία περιστροφής του ριπιδίου), για την οποία τυπικά δεν ισχύουν.

5. ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Από την διεξαχθείσα έρευνα που περιγράφεται οδήγησε στην παρούσα Τεχνική Έκθεση, αναπτύσσονται νέες αναλυτικές λύσεις και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για τον υπολογισμό των εδαφικών ωθήσεων σε τοίχους αντιστήριξης υπό βαρυτική και σεισμική φόρτιση. Οι προτεινόμενες λύσεις δίνουν έμφαση στην απλότητα και την ευκολία εφαρμογής, καθώς σχεδόν στο σύνολο τους καταλήγουν σε εκφράσεις κλειστής μορφής, με τη χρήση απλοποιητικών – αλλά εύλογων από φυσικής σκοπιάς – υποθέσεων. Η ακρίβεια και η αξιοπιστία των προσεγγίσεων που χρησιμοποιούνται τεκμηριώνεται μέσω μεγάλου αριθμού συγκρίσεων με καθιερωμένες μεθόδους από τη βιβλιογραφία και με πειραματικά δεδομένα. Επίσης εξάγονται ακριβείς λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα και διατυπώνονται προτάσεις για την εφαρμογή τους στη πράξη.

Τα βασικά συμπεράσματα της παρούσας έρευνας συνοψίζονται στα εξής σημεία:

(1) Από την προτεινόμενη οριακή ανάλυση τάσεων στο Κεφάλαιο 2 εξάγονται μια σειρά από ακριβείς και προσεγγιστικές λύσεις για τον υπολογισμό ενεργητικών και παθητικών εδαφικών ωθήσεων σε τοίχους βαρύτητας και τοίχους προβόλους υπό συνθήκες γενικευμένης βαρυτικής – σεισμικής φόρτισης. Οι προτεινόμενες λύσεις είναι μαθηματικά απλούστερες από τις κλασικές εξισώσεις Coulomb και Mononobe – Okabe, και παρέχουν προβλέψεις που βρίσκονται πάντα προς την πλευρά της ασφάλειας όπως δείχνουν εκτεταμένες συγκρίσεις με καθιερωμένες λύσεις. Η ακρίβεια των προσεγγιστικών λύσεων, ειδικά στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων, είναι εξαιρετική με μέγιστη απόκλιση 10% σε σχέση με τις αριθμητικές μεθόδους. Για την περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, οι προβλέψεις της μεθόδου είναι επίσης ικανοποιητικές, παρότι το σφάλμα είναι μεγαλύτερο, ενώ βελτιώνονται αισθητά οι προβλέψεις των κλασικών λύσεων.

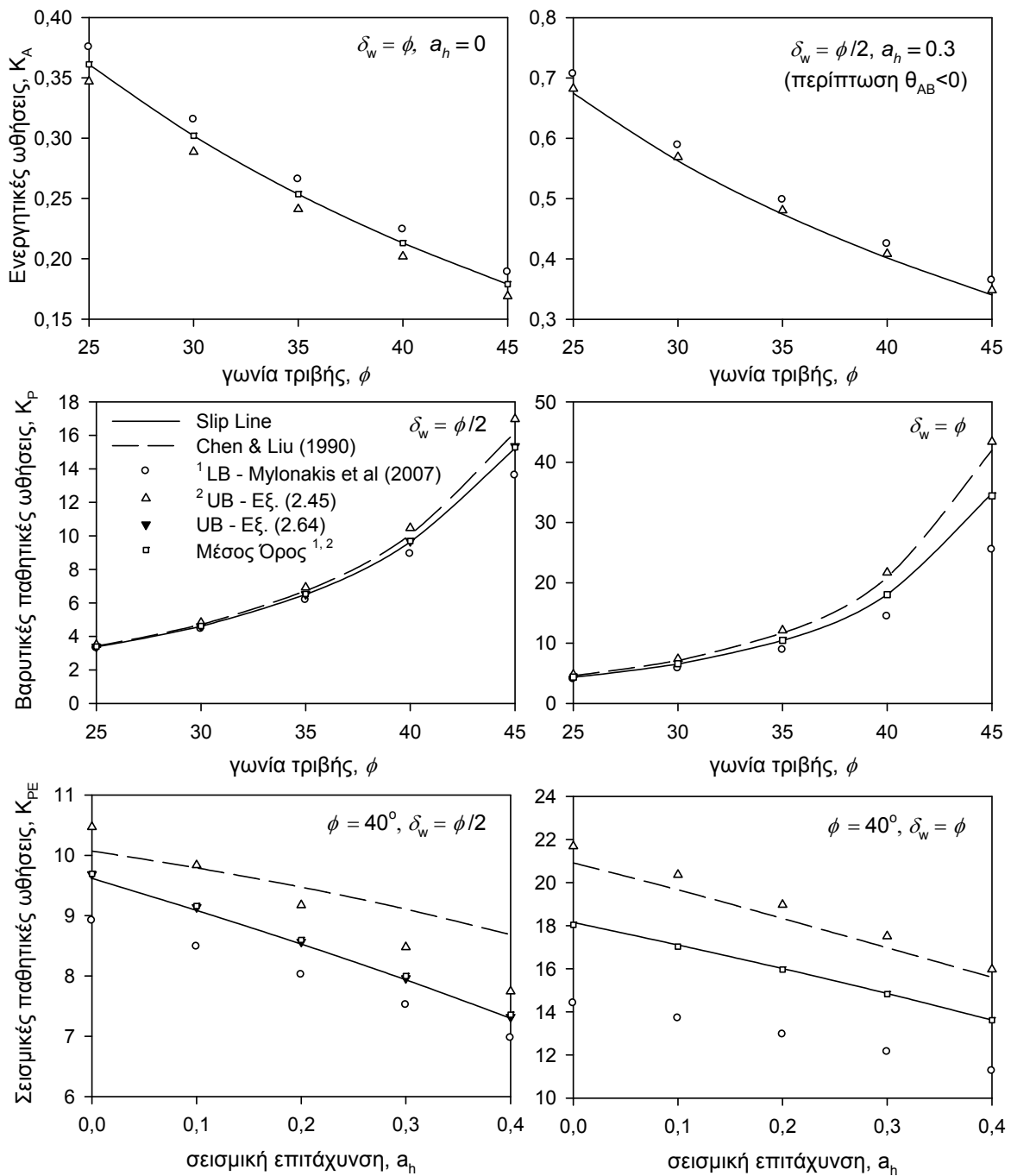
Ο ασφαλής χαρακτήρας σε συνδυασμό με την ικανοποιητική ακρίβεια που παρέχει, καθιστούν τη μεθοδολογία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ώστε να χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές αντί για τις κλασικές λύσεις. Για παράδειγμα στον EC7 (EN1997-1) προτείνεται ήδη μια παρεμφερής λύση κάτω ορίου για τον υπολογισμό παθητικών βαρυτικών ωθήσεων, έναντι της ανεπαρκούς λύσης Coulomb.

(2) Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου κάτω ορίου περιλαμβάνεται η δυνατότητα υπολογισμού κατανομής ωθήσεων ακόμα και για συνθήκες που αποκλίνουν από τις κλασικές παραδοχές της ψευδοδυναμικής ή της πλαστικής ανάλυσης. Για παράδειγμα, η προτεινόμενη λύση κάτω ορίου μπορεί να ενσωματώσει, χωρίς θεωρητική παραβίαση,

φαινόμενα όπως η κυματική διάδοση της σεισμικής διέγερσης στο επίχωμα και η επίδραση διαφορετικών κινηματικών συνθηκών που οδηγούν σε προοδευτική αστοχία του τοίχου. Τα θεωρητικά πλεονεκτήματα της προτεινόμενης λύσης έναντι άλλων μεθόδων, όπως για παράδειγμα έναντι της μεθόδου Steedman & Zeng ή της κλασικής μεθόδου Dubrova αναφορικά με την προσομοίωση του φαινομένου της τοξωτής λειτουργίας, αναδεικνύουν την καταλληλότητά της ως πρακτικό εργαλείο ευρύτερης εφαρμογής για την ανάλυση των συγκεκριμένων φαινομένων.

(3) Η προτεινόμενη κινηματική λύση του Κεφαλαίου 2, η οποία εξάγεται με τη βοήθεια μηχανισμού αστοχίας συμβατού με τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων (κλίση της λογαριθμικής σπείρας στα άκρα του μηχανισμού), βελτιώνει τα αποτελέσματα – ειδικά στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων. Όπως έδειξαν οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4, τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής λύσης στις περισσότερες περιπτώσεις βρίσκονται πολύ κοντά στις ακριβείς τιμές. Σε συνδυασμό με την ευκολία υπολογισμού των εξισώσεων στην μορφή υπολογιστικού φύλλου, μπορεί η συγκεκριμένη λύση να χρησιμεύσει για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της οριακής ανάλυσης τάσεων σε παθητικές (κυρίως) συνθήκες, με τη μορφή ενός απλού μέσου όρου των λύσεων άνω και κάτω ορίου.

Η συγκεκριμένη ιδέα έχει προταθεί για πρακτική εφαρμογή από τους Mylonakis et al.(2007), με την εξίσωση Mononobe – Okabe να αποτελεί το σχετικό άνω όριο για το μέσο όρο. Οι αριθμητικές συγκρίσεις που παρουσιάστηκαν, υποδεικνύουν ότι πάντοτε ο κινηματικός μηχανισμός με τις δύο ζώνες Rankine και την παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα που καταλήγει στην Εξ. (2.45), έχει περίπου ίση και αντίθετη απόκλιση από τις ακριβείς τιμές, σε σχέση με την λύση κάτω ορίου της Εξ. 2.11 (Mylonakis et al. 2007). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο μέσος όρος των δύο ορίων να ταυτίζεται πρακτικώς με τις ακριβείς τιμές, όπως δείχνουν και τα παραδείγματα στο σχήματος 7.1 που ακολουθεί.. Ακόμα και στην περίπτωση των ενεργητικών ωθήσεων όπου η γωνία του ριπιδίου θ_{AB} γίνεται αρνητική (περίπτωση $\delta_w = \varphi/2$ και $a_h = 0.3$ του Σχήματος 7.1) και θεωρητικώς δεν ισχύσει καμία από τις λύσεις, η λύση άνω ορίου μπορεί να χρησιμεύσει για τον υπολογισμό λιγότερο συντηρητικών τιμών, σε σχέση με τη λύση κάτω ορίου.



Σχήμα 7.1 Προτεινόμενη μέθοδος υπολογισμού πρακτικώς ακριβών τιμών για τις εδαφικές ωθήσεις με τον απλό μέσο όρο των κλειστών λύσεων άνω και κάτω ορίου

(4) Υπό συγκεκριμένες συνθήκες που επιτρέπουν την ανάπτυξη ομοιόμορφου πεδίου τάσεων Rankine, για τις οποίες το πρόβλημα αποκτά ευθύγραμμες χαρακτηριστικές, η προσεγγιστική λύση κάτω ορίου μεταπίπτει σε ακριβή λύση Rankine για το γενικευμένο πρόβλημα. Η συγκεκριμένη θεωρία βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση

τοίχων προβόλων με πεπλατυσμένη βάση (σχήματος L ή ανεστραμμένου T). Με βάση τη γενικευμένη λύση Rankine προκύπτει ότι ο κλασικός υπολογισμός της ώθησης στο κατακόρυφο νοητό επίπεδο, οφείλει να λαμβάνει υπόψη μεταβλητή, με τη σεισμική επιτάχυνση, κλίση της ώθησης. Η τιμή αυτή κυμαίνεται από την ελάχιστη τιμή β (κλίση πρανούς) για βαρυτική φόρτιση έως τη μέγιστη τιμή που είναι η γωνία τριβής φ . Η αλλαγή της κλίσης με τη σεισμική επιτάχυνση αποδεικνύεται ευεργετική για την ευστάθεια του συστήματος. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι οι παραδοχές που συνήθως ακολουθούνται στην πράξη μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντική υπερεκτίμηση των φορτίων αστοχίας. Η εφαρμογή μεταβλητής κλίσης μπορεί να αξιοποιηθεί σε επίπεδο κανονισμών με στόχο τον οικονομικότερο σχεδιασμό των συγκεκριμένων κατασκευών αντιστήριξης.

(5) Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάστηκε μια νέα προσέγγιση οριακής ανάλυσης τάσεων, συμβατής με το θεώρημα κάτω ορίου για το πρόβλημα των βαρυτικών και σεισμικών ωθήσεων γαιών σε τοίχους βαρύτητας, εναλλακτική της παραδοσιακής μεθόδου των γραμμών ολίσθησης. Η συγκεκριμένη προσέγγιση απλοποιεί δραστικά το πρόβλημα με τη χρήση της συνάρτησης τάσεων Airy και της ιδιότητας της αυτο-ομοιότητας ως προς την ακτινική μεταβλητή r , μετατρέποντας τις δύο διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας με μερικές παραγώγους σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή θ . Η εξίσωση που προκύπτει επιλύεται αριθμητικά πολύ πιο εύκολα σε σχέση με τις υπάρχουσες μεθόδους, οι οποίες χρησιμοποιούν σύστημα διαφορικών εξισώσεων δύο εξαρτημένων και μίας ή δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Η εξάρτηση του προβλήματος μόνο από τη μεταβλητή θ απαιτεί διακριτοποίηση ενός μόνο κυκλικού τόξου, σε αντίθεση με τον διδιάστατο κάρναβο πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούν οι λύσεις της μεθόδου των χαρακτηριστικών όπως αυτή του Sokolovskii.

(6) Η γνώση της συνάρτησης δυναμικού παρέχει φυσική εποπτεία του προβλήματος και επιτρέπει τον υπολογισμό των τάσεων σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου – όχι μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Επιπλέον συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της πολυπλοκότητας του προβλήματος και ανοίγει το δρόμο στην εφαρμογή, πέραν της ακριβούς αριθμητικής επίλυσης, προχωρημένων αναλυτικών ή απλοποιημένων ημιαναλυτικών μεθόδων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γεωργιάδης, Χ.Γ. (2003). "*Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών*", Εκδ.Συμμετρία, Αθήνα.
- Δημητρακόπουλος, Α.Ν. (2011). "*Προσδιορισμός Βαρυτικών και Σεισμικών Ωθήσεων Γαιών με Οριακή Ανάλυση Τάσεων*", Μεταπτυχιακή Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σεπτέμβριος 2011.
- ΕΑΚ 2000 (2003). "*Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός*", ΟΑΣΠ, Αθήνα.
- Κλουκίνας, Π. (2006). "*Βαρυτικές και Σεισμικές Ωθήσεις Γαιών Με Οριακή Ανάλυση Τάσεων*", Μεταπτυχιακή Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Οκτώβριος 2006.
- Κλουκίνας, Π. και Μυλωνάκης, Γ. (2010). "Ακριβής Λύση Rankine για Σεισμικές Ωθήσεις σε Τοίχους – Προβόλους Μορφής L", 6^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής & Γεωπεριβαλλοντικής Μηχανικής, ΤΕΕ, 29/09 – 1/10, 2010, Βόλος.
- Κλουκίνας, Π. (2012). "*Συμβολή στη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Τοίχων Αντιστήριξης Μέσω Θεωρητικών και Πειραματικών Μεθόδων*", Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Φόη, Α.Μ. (2010). "*Βαρυτικές και Σεισμικές Ωθήσεις Γαιών: Ιστορική Αναδρομή, Λύσεις Οριακής Ισσορροπίας & Ανάλυσης Τάσεων*", Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Ιούνιος 2010
- AASHTO (Association of State Highway and Transportation Officials) (2009). — "*LRFD Bridge Design Specifications, Customary U.S. Units*", 4th Edition (2007) with 2008 and 2009 Interims, AASHTO, Washington, D.C.
- Abbott, B.M. (1967). "*An Introduction to the Method of Characteristics*", Elsevier, NY
- Absi, E. (1984). "*La Theorie de la Plasticite et L'Equilibre Limite en Mechanique des Sols*", Sols et Fondations 185, No. 421, pp. 66-125.
- Airy, G.B. (1862). "*On the Strains in the Interior of Beams*", British Association for the Advancement of Science Report.
- Amontons, G. (1702). "De la Résistance Causée dans les Machines, Tant par les Frottemens des Parties qui les Composent, que par la Roideur des Cordes qu'on y Employe, et, la Maniere de Calculer l'un et l'Autre", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1699, 206, Paris.

- Atkinson, J. (1993). "*An Introduction to the Mechanics of Soils and Foundations Through Critical State Soil Mechanics*", McGraw-Hill, Book Co. Inc. London.
- Azarov, N.S. (1975). "*Analytical Method for Determination of Backfill Pressure on Retaining Walls*", Balashikhinsk Pedagogic Institute (in Russian)-English Translation from Osnovaniya, Fundamenty I Mekhanika Gruntov.
- Bell, A.L. (1915). "The Lateral Pressure and Resistance of Clay and the Supporting Power of Clay Foundations", *Min. Proc.*, I.C.E., 199, 1, pp.233-272.
- Berezantsev, V.G. (1948). "Limit Equilibrium of a Medium Having Internal Friction and Cohesion in a Stressed State, Symmetrical to the Axis", *Appl. Math. Mech. (Prikl. Mat. Mekhanika)*, 12: 99-100 (in Russian).
- Bleich, H. (1932). "Über die Bemessung Statisch Unbestimmter Stahl-Tragwerke Unter" *Bauingenieur*, 13:261-267.
- Bolton, M.D. and Steedman, R.S. (1985). "The Behavior of Fixed Cantilever Walls Subjected to Lateral Loading". In *Application of Centrifuge Modeling to Geotechnical Design*, Craig (ed.). Balkema, Rotterdam.
- Bolton, M.D. and Powrie, W. (1987). "Collapse of Diaphragm Walls Retaining Clay", *Geotechnique*, 37, No. 3, pp. 335-353.
- Boussinesq, J. (1876). "Essai Théorique sur l'Equilibre d'Elasticité des Massifs Pulveruents", *Mem. Savante etrangere*, Acad. Belgique, 40, pp. 1-80.
- Briske, R. (1927). "Die Erdbebensicherheit von Bauwerken", *Die Bautechnik*, Vol 5, 425-430, 453-457, 547-555.
- BS 8002 (1994). "*Code of Practice for Earth Retaining Structures*", B.S. Institution.
- Budhu, M. (2007). "*Soil Mechanics & Foundations*", 2nd Edition, J. Wiley & Sons Inc, New York.
- Caquot, A. (1934). "*Equilibre des Massifs a Frottement Interne, Stabilité des Terres Pulvérulents et Cohérentes*", Gauthier-Villars: Paris.
- Caquot, A. and Kerisel, J. (1948). "Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations". *Librairie du Bureau des Longitudes*, Ecole Polytechnique, Paris Gauthier - villars (Translated from French by Maurice A. Bec.)
- Caquot, A. and Kerisel, J. (1966). "*Traité de Mécanique des Sols*", 4th Edition, Gauthier-

Villars, Paris.

Cauchy, A.L. (1823). "Recherches sur l'Equilibre et le Mouvement Intérieur des Corps Solides ou Fluids, Elastiques ou non Elastiques", *Bull. Soc. Philomath.* Paris, 9-13 (1823).

Chang, M.F. (1981). "*Static and Seismic Lateral Earth Pressures on Rigid Retaining Structures*", Ph.D. Thesis, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette.

Chang, M.F. (1997). "Lateral Earth Pressures Behind Rotating Walls", *Canadian Geotechnical Journal*, 34, pp. 498 – 509.

Chen, W.F. and Rosenfarb, J.L. (1973). "Limit Analysis Solutions of Earth Pressure Problems", *Soils and Foundations*, 13 (4): 45–60.

Chen, W.F. (1975). "*Limit Analysis and Soil Plasticity, Developments in geotechnical engineering*", Elsevier, Amsterdam.

Chen, W.F. and Liu, X.L. (1990). "*Limit Analysis in Soil Mechanics*", Elsevier, Amsterdam

Cheng, Y.M., Au, S.K, Hu, Y.Y. and Wei, W.B. (2008). "Active Pressure for Circular Cut with Berezantzev's and Prater's Theories, Numerical Modeling and Field Measurements", *Soils and Foundations*, Vol. 48, No. 5, pp. 621-631.

Cheng, Y.M. (2003). "Seismic Lateral Earth Pressure Coefficients for $c-\phi$ Soils by Slip Line Method", *Computers and Geotechnics*, 30, pp. 661-670.

Choudhury, D. and Nimbalkar, S.S. (2008) "Seismic Rotational Displacement of Gravity Walls by Pseudodynamic Method", *International Journal of Geomechanics*, ASCE, Vol.8, No.3, pp.169-175.

Choudhury, D. and Nimbalkar, S.S. (2005). "Seismic Passive Resistance by Pseudo-Dynamic Method", *Geotechnique*, London, Vol. 55 No.9 ,pp 699-702.

Choudhury, D. and Nimbalkar, S.S. (2006). "Pseudo-Dynamic Approach of Seismic Active Earth Pressure Behind Retaining Wall", *Geotechnical and Geological Engineering*, Springer, The Netherlands, Vol.24, No.5 , pp1103-1113.

Chu, S.C. (1991). "Rankine Analysis of Active and Passive Pressures in Dry Sands", *Soils & Foundations*, Vol. 31, No 4, pp.115 – 120.

Chugh, A. K. (1995). "A Unified Procedure for Earth Pressure Calculations", *Proceedings*

- of the 3rd International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, St. Louis, 1995.
- Clayton, C.R.I., Militisky, J. and Woods, R.I. (1993). "*Earth Pressure and Earth Retaining Structures*", 2nd Edition, Blackie Acad.& Prof.
- Considerere, A. (1870). "*Sur la Pousse des Terres*", Annales des Pont et Chaussées, 4th Series, 19, 547.
- Costet, J. and Sanglerat, G. (1975). "*Cours Pratique de Mechanique des Sols, Plasticité et Calcul des Tassements*", 2nd edition, Dunod Technique Press, Paris, France.
- Coulomb, C.A. (1776). "Essai sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Stratique Relatifs a l' Architecture". *Memoires de Mathematiqueet de Physique, Presentes a l' Academie Royale des Sciences*; Paris, Vol. 7, pp. 343-382.
- Darwin G.H. (1882-83). "On the Horizontal Thrust of a Mass of Sand", *Minutes of Proceedings*, I.C.E., Paper No 1904, Vol. 71, issue 1883, p.350-378.
- Drucker, D.C. (1950). "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity", *Quarterly of Applied Mathematics*, 7, 411 – 418.
- Drucker, D.C. and Prager, W. (1952). "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", *Quarterly of Applied Mathematics*, 10: 157-165.
- Drucker, D.C., Greenberg, H.J. and Prager, W. (1952). "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", *Quarterly of Applied Mathematics*, 9: 381–389.
- Dubrova, G.A. (1963). "*Interaction of Soil and Structures*", Rehnoy Transport, Moscow, U.S.S.R.
- Ebeling, R.M., Morrison E.E., Whitman R.V. & Liam Finn W.D. (1992). "*A Manual for Seismic Design of Waterfront Retaining Structures*", US Army Crops of Engineers, Technical Report ITL-92-11.
- EN 1997-1 (2004). "*Eurocode 7, Geotechnical Design, Part 1: General Rules*", CEN, E.C. for Standardization, Bruxelles.
- EN 1998-5 (2004). "*Eurocode 8, Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures, Part 5: Foundations, Retaining Structures and Geotechnical Aspects*", CEN E.C. for Standardization, Bruxelles.
- Evangelista, A., Scotto di Santolo, A. and Simonelli, A.L. (2010). "Evaluation of

- Pseudostatic Active Earth Pressure Coefficient of Cantilever Retaining Walls", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 30, Issue 11, pp. 1119–1128.
- Fang, Y.S., Chen, J.M., Chen, C.Y. (1997). "Earth Pressures with Sloping Backfill", *Journal of Geotech. & Geoenv. Engineering*, ASCE, Vol. 123, No 3, pp 250 – 259.
- Fang, Y.S. and Ishibashi, I. (1986). "Static Earth Pressures with Various Wall Movements", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 112, No 3, pp. 317 – 333.
- Fang, Y.S., Chen, T.J. and Wu, B.F. (1994). "Passive Earth Pressures with Various Wall Movements", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 120, No 8, pp. 1307-1323.
- Fang, Y.S., Chen, T.J., Yang, Y.C. and Tang, C.C. (2001). "The Behavior of Retaining Walls Under 1999 Chi-Chi Earthquake", *Proceedings of the Fourth International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics and Symposium in Honor of Professor W. D. Liam Finn*, San Diego, California, March 26-31, 2001.
- Fang, Y.S., Yang, Y.C. and Chen, T.J. (2003). "Retaining Walls Damaged in the Chi-Chi Earthquake", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 40, pp. 1142-1153.
- Fitzgerald, M.F. (1915). Appendix II to Bell (1915), *Min. Proc.*, I.C.E., 199, 1, pp 269-272.
- Français (1820). "Recherches sur la Poussée des Terres", *Mémoires de l'officier du Genie*, No.4, Paris.
- Ghanbari, A. and Ahmadabadi, M. (2010). "New Analytical Procedure for Seismic Analysis of Reinforced Retaining Wall with Cohesive-Frictional Backfill", *Geosynthetics International*, 17, No6, pp. 364-379.
- Giarlelis, Ch. and Mylonakis, G. (2011). "Interpretation of Dynamic Retaining Wall Model Tests in Light of Elastic and Plastic Solutions", *Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, 31(1), 16-24.
- Greco, V.R. (1997). "Stability of Retaining Walls Against Overturning", *Journal of Geotech. & Geoenv. Engineering*, ASCE, Vol. 123, No 8, pp. 778 – 780.
- Greco, V.R. (1999). "Active Earth Thrust on Cantilever Walls in General Conditions", *Soils and Foundations*, Vol. 39, No 6, pp. 65–78.
- Greengerg, H.J. and Prager, W. (1952). "On Limit Design of Beams and Frames", *Trans.*

- Am. Soc. Civil Engrs*, 117, 447.
- Gustafson, K. (1998). "Domain Decomposition, Operator Trigonometry, Robin Condition", *Contemporary Mathematics*, 218. 432–437.
- Gvozdev, A.A. (1936). "The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation", *Proc. of the Conference on plastic deformation*, Akademiia Nauk, Moscow/Leningrad (in Russian) – English Translation by R.M. Haythornthwaite, *International Journal of Mechanics Sciences*, 1 (1960) 322-335.
- Handy, R.L. (1985). "The Arch in Soil Arching", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 111, No 3, pp. 302 - 318.
- Harr, M. (1966). "*Foundation of Theoretical Soil Mechanics*", McGraw – Hill, New York
- Harr, M. (1977). "*Mechanics of Particulate Media – A Probabilistic Approach*". McGraw – Hill, New York.
- Harrop – Williams K.O. (1989). "Geostatic Wall Pressures", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 115, No 9, pp. 1321 – 1325.
- Hencky, H. (1923). "Ueber Einige Statisch Bestimmte Faelle des Gleichgewichts in Plastischen Koerpern", *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 3: 241-251.
- Hettiaratchi, D.R.P. and Reece, A.R. (1975). "Boundary Wedges in Two Dimensional Passive Soil Failure". *Geotechnique*, 25, No. 2, pp. 197-220.
- Heyman, J. (1972). "*Coulomb's Memoir on Statics; an Essay in the History of Civil Engineering*", Cambridge University Press.
- Hill, R. (1950). "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, London
- Huntington, W. C. (1957). "*Earth Pressures and Retaining Walls*", John Wiley and Sons, New York.
- Ishibashi, I. and Fang, Y.S. (1987). "Dynamic Earth Pressures with Different Wall Movement Modes", *Soils and Foundations*, 27:4, 11-22.
- Ishii, Y., Arai, H. and Tsuchida, H. (1960). "Lateral Earth Pressure in an Earthquake", In *Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo, Japan. Vol. 1, pp. 211–230.
- Iskander M, Omidvar M and Elsherif O (2013) Conjugate stress approach for rankine

- seismic active earth pressure in cohesionless soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 139(7): 1205-1210.
- Jaky, J. (1944). "The Coefficient of Earth Pressure at Rest", *Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers*, vol. 7: 355-358 (In Hungarian).
- James, R.G. & Bransby, P.L. (1970). "Experimental and Theoretical Investigations of a Passive Pressure Problem", *Géotechnique*, Vol.20, No.1, pp. 17-37.
- James, R.G. & Bransby, P.L. (1971). "A Velocity Field for Some Passive Earth Pressure Problems", *Géotechnique*, Vol.21, No.1, pp. 61-83.
- Janssen, H.A. (1895). "Versuche über Getreidedruck in Silozellen", *Zeitschr. d. Vereines deutscher Ingenieure*, 39, 1045–1049.
- Kame, G.S., Dewaikar, D.M. and Choudhury, D. (2010). "Active Thrust on a Vertical Retaining Wall with Cohesionless Backfill", *Electronic Journal of Geotechnical Engineering-EJGE*, Vol. 15, pp.1848-1863.
- Karman, von T. (1927). "Über Elastische Grenzzustände", *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, p.23, Zurich.
- Kazinczy, G. (1914). "Test with Clamped Beams", *Betonsemk*, Vol.2: 68-71, 83-87, 101-104 (in Hungarian).
- Kazinczy, G. (1938). "Versuche mit Innerlich Statisch Unbestimmten Fachwerken", *Bauingenieur*, 19: 236.
- Kelley, C.T. (1995). *Iterative Methods for Linear and Non-Linear Equations*, SIAM Publications, Philadelphia.
- Kerisel, J. and Absi, E. (1990). "Active and Passive Earth Pressure Tables" A.A. Balkema
- Kloukinas, P., Mylonakis, G., Papantonopoulos, K. and Atmatzidis, D. (2007). "Seismic Earth Pressures on Gravity Walls by Stress Limit Analysis", *4ICEGE*, Paper No.1671, Thessaloniki, Greece, June 25-28.
- Kloukinas, P., Mylonakis, G. and Papantonopoulos, K. (2008). "Distribution of Seismic Earth Pressures on Gravity Walls by Wave-Based Stress Limit Analysis", *GEESD - Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics IV (ASCE, GSP 181)*, Sacramento, May 2008
- Kloukinas, P. and Mylonakis, G. (2011). "Rankine Solution for Seismic Earth Pressures on L – Shaped Retaining Walls", *5ICEGE*, Santiago, Chile, January 10-13.

- Kötter, F. (1903). "Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften", Berlin, pp 229–233.
- Kramer, S. L. (1996). "*Geotechnical Earthquake Engineering*", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Kumar, J. (2001). "Seismic passive earth pressure coefficients for sands", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 38 (4), pp. 876–81.
- Kumar, J. and Chitikela, S. (2002). "Seismic Earth Passive Pressure Coefficients Using the Method of Characteristics", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 39 (2), pp 463-471.
- Kumar, J. and Subba Rao, K.S. (1997a). "Passive Pressure Coefficients, Critical Failure Surface and its Kinematic Admissibility", *Geotechnique*, 47:1, 185-192.
- Kumar, J. and Subba Rao, K.S. (1997b). "Passive Pressure Determination by Method of Slices", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 21, 337-345.
- Lamé, M.G. (1852). "*Lecons sur la Theorie Mathematique de l'Elasticite des Corps Solides*", Bachelier, Imprimer-Libraire, Ecole Polytechnique, Paris.
- Lancellotta, R. (2002). "Analytical Solution of Passive Earth Pressure", *Geotechnique* 52, No. 8, 617-619.
- Lancellotta, R. (2007). "Lower-Bound Approach for Seismic Passive Earth Resistance". *Geotechnique*, Vol. 57, No. 3, pp. 319-321.
- Lee, I.K. and Herington, J.R. (1972). "A Theoretical Study of the Pressures Acting on a Rigid Wall by a Sloping Earth or Rock Fill", *Geotechnique* 22, No 1, pp.1-26.
- Lévy, M. (1873). "Sur une Théorie Rationnelle de l'Equilibre des Terres Fraîchement Remuées et ses Applications au Calcul de la Stabilité des Murs de Soutènement", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 18, 241.
- Ling, H. I., Leschinsky, D. and Perry, E. B. (1997). "Seismic Design and Performance of Geosynthetic-Reinforced Soil Structures" *Geotechnique*, Vol. 47, No. 5, pp. 933–952.
- Maier-Leibnitz, H. (1928). "Beitrag zur Frage der Tatsachlichen Tragfähigkeit Einfacher und Durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St.37 aus Holz", *Bautechnik*, 6: 11-14, 27-31.

- Malyshev, M.U. (1969). "An Approximate Solution to Ultimate Equilibrium Problems in Loose Media, Based on Linearization of the Initial Equation", *Proc. 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico City, pp.406-408.
- Martin, C.M (2005). "Exact Bearing Capacity Calculations Using the Method of Characteristics", *Proceedings of the 11th IACMAG*, Turin, Vol. 4, 441-450.
- Matsuo, H. and Ohara, S. (1960). "Lateral Earth Pressure and Stability of Quay Walls During Earthquakes" *Proceedings of the second World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo and Kyoto, Japan, Vol. 1, pp. 165-181.
- Matsuo, H. (1941). "Experimental Study on the Distribution of Earth Pressures Acting on a Vertical Wall During Earthquakes", *Journal of the Japanese Society of Civil Engineers*, Vol. 27, No. 2.
- Melan, E. (1932). "Das Plastische Verhalten des Betons", *Beton & Eisen*, vol. 31.
- Melan, E. (1936). "Theory Statisch Unbestimmter Systeme aus Ideal - Plastischem Baustoff", *Sitzber. Akad. Wiss., Abt. IIA*, 145, 195-218.
- Michalowski, R.L. (1984). "A Differential Slice Approach to the Problem of Retaining Wall Loading", *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 8(5), 493–502.
- Michalowski, R.L. (2005). "Coefficient of Earth Pressure at Rest", *J. Geotech. Geoenviron. Engineering*, 131(11), 1429–1433.
- Michalowski, R.L. (1989). "Three-Dimensional Analysis of Locally Loaded Slopes.", *Geotechnique*, Vol. 39, No. 1 , pp 27–38.
- Michalowski, R.L. (2007). "Displacements of Multiblock Geotechnical Structures Subjected to Seismic Excitation", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 133, No. 11, pp 1432-14309.
- Mohr, Ot. (1882). "Ueber die Darstellung des Spannunggrustandes und des Deformationzustandes eines Korperelementes und uber die Anwendung darselben in der Festigkeitslehre", *Zivilingenieur*, Vol. .28, pp.113-156.
- Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). "On the Determination of Earth Pressure During Earthquakes". *Proceeding of the World Engineering Congress*, Tokyo, Vol. 9, pp. 179-185.
- Morrison, E.E. and Ebeling, R.M. (1995). "Limit Equilibrium Computation of Dynamic

- Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal*, 32:3, 481-487.
- Müller-Breslau H. (1906). "*Erddruck auf Stutzmauern*", Alfred Kroner, Stuttgart.
- Murthy, V.N.S. (2003). "*Geotechnical Engineering: Principles and Practices of Soil Mechanics and Foundation Engineering*", Marcel Dekker, Inc., 1029p.
- Musschenbroek, van P. (1729). "*Physicae experimentales: et Geometrica de Magnete, Tuborum Capillarum Vitreorumque Speculorum attractione, Magnitudine Terrae, Cohaerentia Corporum firmiterum*", *Dissertationes ut et Ephemerides Meteorologicae Ultrajectinae*, Leyden (1729).
- Mylonakis, G., Kloukinas, P. and Papantonopoulos, C. (2007). "An Alternative to the Mononobe–Okabe Equations for Seismic Earth Pressures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 27, Issue 10, Pages 957-969.
- Nadai, A. (1963). "*Theory of Flow and Fracture of Solids*", McGraw-Hill, New York.
- Nadukuru, S.S. and Michalowski, R.L. (2012). "Arching in Distribution of Active Load on Retaining Walls", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 138, No. 5, pp. 575-584
- Nakamura, S. (2006). "Reexamination of Mononobe–Okabe Theory of Gravity Retaining Walls Using Centrifuge Model Tests", The Japanese Geotechnical Society, *Soils and Foundations*, Vol. 46, No 2, pp 135 -146.
- Narain, J., Saran, S. and Nandakumaran, P. (1969). "Model Study of Passive Pressure in Sand", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95 (4), pp. 969 – 983.
- NEHRP (2009). "*National Earthquake Hazard Reduction Program*", Federal Emergency Management Agency (FEMA), Building Seismic Safety Council, Washington DC.
- O’Sullivan, C. and Creed, M. (2007). "Using a Virtual Back in Retaining Wall Design", *Geotechnical Engineering*, Vol. 160, Issue GE3, pp. 147 – 151.
- Okabe, S. (1926). "General Theory on Earth Pressure", *Journal of the Japanese Society of Civil Engineers Tokyo, Japan*, Vol. 12, No. 1.
- Paik, K.H. and Salgado, R. (2003). "Estimation of Active Earth Pressures Against Rigid Retaining Walls Considering Arching Effects", *Geotechnique* 53, No 7, pp. 643 – 653.
- Peck, R. B (1969). "Deep Excavations and Tunnelling in Soft Ground", *Proceedings of the*

- 7th *International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, State of the Art volume, pp. 225-250.
- Pipatpongsa and Vardhanabhuti (2009). "Analyses of Coefficient of Lateral Earth Pressure in Wedge-Shaped Granular Mound Based on Jaky's (1944) Hypothesis", *The 14th National Convention on Civil Engineering of Thailand*, Nakhon Ratchasima, Thailand, May 13-15, pp.147-152.
- Potts, D.M. and Fourie, A.B. (1986). "A numerical Study of the Effects of Wall Deformation on Earth Pressures", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 10, pp.383 – 405.
- Powrie, W. (1997). "*Soil Mechanics: Concepts & Applications*", E & FN Spon, London.
- Prager, W. and Hodge, P.G. (1951). "*The Theory of Perfectly Plastic Solids*", John Wiley and Sons, New York.
- Prakash, S. and Basavanna, B.M. (1969). "Effect of Size and Shape of Foundations on Elastic Coefficients of Layered Soil Mass", *Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile.
- Prandtl, L. (1920). "Über die Harte Plastischer Körper", *Göttinger Nachrichten, Math. Phys.* K1, pp74-85.
- Prandtl, L. (1923). "Anwendungsbeispiele zu Einem Henckyschen Satz über das Plastische Gleichgewicht." *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 3: 401-406.
- Psarropoulos, P.N., Klonaris, G. and Gazetas, G. (2005). "Seismic Earth Pressures on Rigid and Flexible Retaining Walls", *Soil Dyn. and Earthquake Engineering*, 25:7-10, 795-809.
- Rankine, W.J.M. (1857). "On the Stability of Loose Earth", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 147, pp. 9 – 27.
- Reissner, H. (1924). "Zum Erddruck Problem", *Proceedings of the First International Congress Applied Mechanics*, Delft, pp.295-311.
- Richards, R.Jr. and Elms, D.G. (1979). "Seismic Behavior of Gravity Retaining Walls", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 105, No. GT4, April, pp. 449-464.105:4, 449-464.
- Richards, R. Jr., Huang, C. and Fishman, K. L. (1999). "Seismic Earth Pressure on Retaining Structures", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*,

- 125:9,771-778.
- Riemann, B. (1860). "Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von Endlicher Schwingungsweite", *Abh. Konig. Ges. Wiss Goettingen*, 8 in Werke, 188-207.
- Saint-Venant, B.DE (1870). "Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Lévy...par MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 15, 237.
- Saint-Venant, B.DE. (1870). "Sur une Détermination Rationnelle, par Approximation, de la Pousée qu'Exercent des Terres Dépourvues de Cohésion, Contre un Mur Ayant une Inclinaison Quelconque", *Journal de Mathématiques*, 2nd series 15, 250.
- Salençon, J. (1977). "*Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics*", Wiley, New York (USA).
- Samsioe, A. F. (1955). "Stresses in Downstream Part of an Earth or a Rock Fill Dam", *Geotechnique*, Vol.5, No.2 pp. 200-223.
- Scott, R.F. (1981). "*Foundation Analysis*", Prentice Hall, New Jersey.
- Scotto di Santolo, A. and Evangelista, A. (2011). "Dynamic Active Earth Pressure on Cantilever Retaining Walls", *Computers and Geotechnics*, Volume 38, Issue 8, pp 1041-1051.
- Seed, H.B. and Whitman, R.V. (1970). "Design of Earth Retaining Structures for Dynamic Loads". *Proceedings, ASCE Speciality Conference on Lateral Stresses in the Ground and the Design of Earth Retaining Structures*, Cornell University, Ithaca, New York, pp.103-147.
- Shanley, F.R.(1947). "Inelastic Column Theory", *J. Aeronaut. Sci.*, 14, 261-267.
- Sherif, M. A., Ishibashi, I. and Lee, C. D. (1982). "Earth Pressures Against Rigid Retaining Walls", *Journal of the Geotech. Engineering Division*, Vol. 108, No. GT5, pp. 679-695.
- Sherif, M.A. and Fang, Y.S. (1983). "*Dynamic Earth Pressures Against Rotating and Non-Yielding Retaining Walls*" Soil Engineering Research Report, No. 23, University of Washington, Seattle, Washington, November.
- Shiau, J.S., Augarde, C.E., Lyamin, A.V. and Sloan, S.W. (2008). "Finite Element Analysis of Passive Earth Resistance in Cohesionless Soils", *Soils and Foundations*, Vol. 48, No.6, pp. 843-850.

- Sokolovskii, V.V. (1965). "*Statics of Granular Media*". New York : Pergamon. 270 pp.
- Soubra, A.H. (2000). "Static and Seismic Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal* , 37, pp. 463-478.
- Soubra, A.H. and Macuh, B (2002). "Active and Passive Earth Pressure Coefficients by a Kinematical Approach", *Geotechnical engineering*, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol. 155 No 2, pp119-131.
- Steedman, R.S. and Zeng, X. (1990). "The Influence of Phase on the Calculation of Pseudo-Static Earth Pressure on a Retaining Wall", *Geotechnique*, 40(1), 103-112.
- Subba, Rao, K.S. and Choudhury, D.S.M. (2005). "Seismic Passive Earth Pressures in Soils", *Journal of geotech. and geoenvironmental engineering*, ASCE, 131(1), 131-135.
- Symonds, P.S. and Neal, B.G. (1951). "Recent Progress in the Plastic Methods of Structural Analysis", Part I, *J. Franklin Inst.*, 252, 5, 383 – 407.
- Terzaghi, K. (1943). "*Theoretical Soil Mechanics*", John Wiley and Sons, New York.
- Treanter, N.A. (2004). "Approaches to the Design of Cantilever Retaining Walls", *Geotechnical Engineering*, Vol. 157, Issue 1, pp. 27 – 35.
- Tsagareli, Z.V. (1965). "Experimental Investigation of the Pressure of a Loose Medium on Retaining Walls with a Vertical Backface and Horizontal Backfill Surface", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 91 (4), pp.197 - 200.
- Tschaebotarioff, G.P. (1962). "*Retaining Structures*" In: G.A. Leonards (Editor), *Foundation Engineering*, McGraw – Hill, New York, NY, pp. 438 – 524.
- Wang, Y.Z (2000). "Distribution of Earth Pressure on a Retaining Wall", *Geotechnique* 50, No 1, pp.83 – 88.
- Whitman, R.V. (1991). "Seismic Design of Earth Retaining Structures", *Proceedings of International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Rolla, Missouri, 1767-1778.
- Wood, J.H. (1973). "*Earthquake-Induced Soil Pressures on Structures*", EERL 73-05, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Inst. of Technology, Pasadena, CA.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Δημοσιεύσεις άρθρων στο 7^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής Μηχανικής,
5-7 Νοέμβρη 2014, Αθήνα

1) Υπολογισμός Βαρυτικών και Σεισμικών Ωθήσεων Γαιών με Χρήση Βελτιωμένων Μηχανισμών Οριακής Ισορροπίας

Determination of Gravitational and Seismic Earth Pressures by Improved Limit Equilibrium Failure Mechanisms

ΚΛΟΥΚΙΝΑΣ, Π., ΦΟΗ, Α-Μ., ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ, Γ.Ε.

2) Οριακή Ανάλυση Ριπιδίου Τάσεων σε Μη-Συνεκτικό Έδαφος με Ίδιον Βάρος, με Χρήση Τασικών Συναρτήσεων

Limit Analysis of a Stress Fan in Frictional Soil with Self-weight, by means of Stress Functions

ΚΛΟΥΚΙΝΑΣ, Π., ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Α-Ν., ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ, Γ.Ε.

Υπολογισμός Βαρυτικών και Σεισμικών Ωθήσεων Γαιών με Χρήση Βελτιωμένων Μηχανισμών Οριακής Ισορροπίας

Determination of Gravitational and Seismic Earth Pressures by Improved Limit Equilibrium Failure Mechanisms

ΚΛΟΥΚΙΝΑΣ, Π. Πολιτικός Μηχανικός, Μεταδιδάκτωρ Ερευνητής, Παν. Bristol
ΦΟΗ, Α-Μ. Πολιτικός Μηχανικός, Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια, Π.Π.
ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ, Γ.Ε. Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής, Π.Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ : Παρουσιάζεται κινηματική λύση του τύπου της Οριακής Ισορροπίας για τον υπολογισμό παθητικών και ενεργητικών ωθήσεων σε τοίχους αντιστήριξης υπό συνδυασμένη βαρυτική και σεισμική φόρτιση. Οι μηχανισμοί αστοχίας αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα και λογαριθμικές σπείρες και επιλέγονται ώστε να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων. Η παρούσα ανάλυση καταλήγει σε εύχρηστες μαθηματικές σχέσεις κλειστής μορφής. Η ακρίβεια των προβλέψεων της είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική, όπως προκύπτει από συγκρίσεις με καθιερωμένες λύσεις της βιβλιογραφίας.

ABSTRACT : An upper bound limit equilibrium solution is presented for determining passive and active earth pressures on retaining walls under combined gravitational and earthquake loading. The failure mechanisms are formed by combinations of planar and log-spiral surfaces, pre-specified to satisfy the stress boundary conditions of the problem. The proposed analysis yields closed-form expressions, which provide satisfactory accuracy, as indicated by extensive comparisons against established solutions from the literature.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασικό στοιχείο του σχεδιασμού των συμβατικών τοίχων αντιστήριξης έναντι βαρυτικών και σεισμικών φορτίων παραμένει διαχρονικά ο προσδιορισμός των εδαφικών ωθήσεων. Η σημασία των απλοποιημένων ψευδοστατικών μεθόδων δεν έχει καθόλου υποβαθμιστεί με την εμφάνιση των σύγχρονων αντιλήψεων σχεδιασμού (επιτρεπόμενες μετακινήσεις, επιτελεστικότητα), καθώς και στις σύγχρονες μεθόδους είναι απαραίτητη η πρόβλεψη του φορτίου διαρροής και της αντίστοιχης κρίσιμης επιτάχυνσης πάνω από την οποία αναπτύσσονται οι μόνιμες μετακινήσεις.

Η ανάγκη για ασφαλείς, πλην όμως οικονομικές κατασκευές αντιστήριξης, επιβάλλει τον ακριβέστερο δυνατό υπολογισμό των δράσεων σχεδιασμού. Υπό αυτό το πρίσμα, έχει αρχίσει να αμφισβητείται η καταλληλότητα των δημοφιλών κλασικών εξισώσεων των Coulomb (1776) και Mononobe – Okabe (Okabe, 1926; Mononobe & Matsuo, 1929) για τον υπολογισμό βαρυτικών και σεισμικών εδαφικών ωθήσεων γαιών. Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί πληθώρα λύσεων άνω ορίου, με βελτιωμένους μηχανισμούς αστοχίας, οι οποίες βελτιώνουν την ακρίβεια των προβλέψεων των κλασικών λύσεων, όμως δεν οδηγούν σε κλειστές μαθηματικές εκφράσεις, αλλά σε πολυπαραμετρικές εξισώσεις που απαιτούν αριθμητική βελτιστοποίηση (Chen & Liu, 1990; Soubra, 2000; Shamsabadi et al, 2013). Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και στις ακριβέστερες αναλύσεις με τη μέθοδο των γραμμών διαρροής η οποία επίσης επιλύεται αριθμητικά. (Caquot & Kerisel, 1948; Sokolovskii, 1965;

Kerisel & Absi, 1990, Cheng, 2003). Επίσης έχουν προταθεί προσεγγιστικές λύσεις κάτω ορίου (Lancellotta, 2007; Mylonakis et al., 2007), οι οποίες είναι κλειστής μορφής, αλλά οι προβλέψεις τους είναι αρκετά συντηρητικές σε πολλές περιπτώσεις.

Επομένως, εξακολουθεί να υφίσταται η ανάγκη για την ανάπτυξη απλών και εύχρηστων υπολογιστικών εργαλείων για τους μηχανικούς, τα οποία ταυτόχρονα να παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια υβριδική λύση τύπου άνω ορίου, που αναπτύσσεται σύμφωνα με τη μέθοδο της οριακής ισορροπίας, αλλά είναι όμως συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων, όπως προκύπτουν από την μέθοδο κάτω ορίου. Συγκρίσεις αριθμητικών αποτελεσμάτων μεταξύ της προτεινόμενης λύσης και άλλων καθιερωμένων λύσεων της βιβλιογραφίας παρουσιάζονται με τη μορφή αδιάστατων πινάκων και διαγραμμάτων.

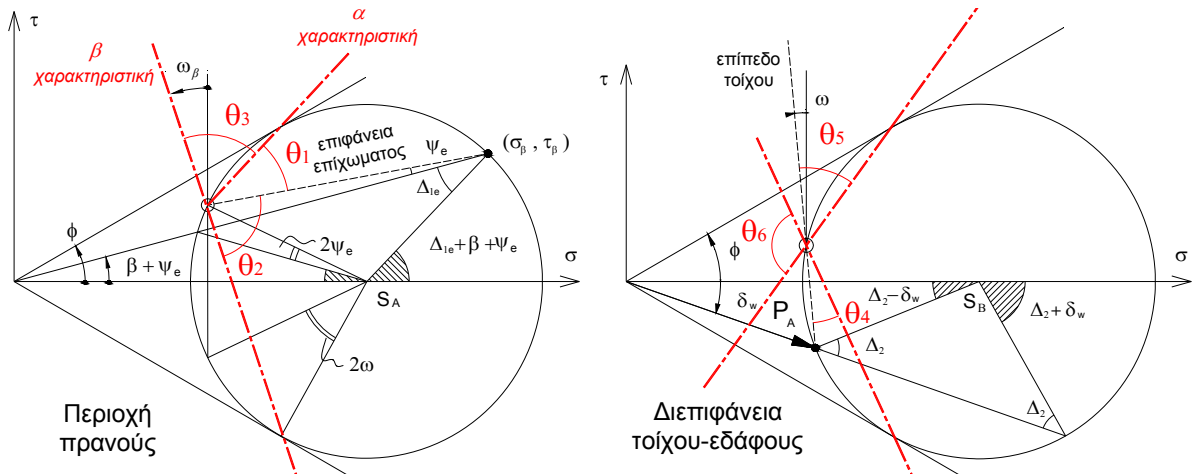
2. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Οι συμβατικές μέθοδοι άνω ορίου προκύπτουν με βελτιστοποίηση εύλογων μηχανισμών αστοχίας, ώστε να μεγιστοποιούνται οι ενεργητικές ωθήσεις και να ελαχιστοποιούνται οι παθητικές. Στην παρούσα λύση, αντίθετα, ο κρίσιμος μηχανισμός είναι προκαθορισμένος, ώστε να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων στην ελεύθερη επιφάνεια του πρανούς και στην διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους, όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Οι μηχανισμοί αστοχίας, που φαίνονται στο Σχήμα 2, αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα στις ζώνες Rankine και τμήματα λογαριθμικής σπείρας για τις μεταβατικές ζώνες. Ο πρώτος μηχανισμός (Σχήμα 2α) θεωρεί και δεύτερη ζώνη Rankine κοντά στον τοίχο, και είναι παρόμοιος με εκείνον της λύσης των Chen & Liu (1990) και συμβατός με τις παραδοχές της λύσης τύπου κάτω ορίου των Mylonakis et al. (2007). Ο δεύτερος εναλλακτικός μηχανισμός θεωρεί μία μόνο μεταβατική ζώνη από την ζώνη Rankine του πρανούς μέχρι τον τοίχο, κάτι που είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα (Caquot & Kerisel, 1948; Sokolovskii, 1965).

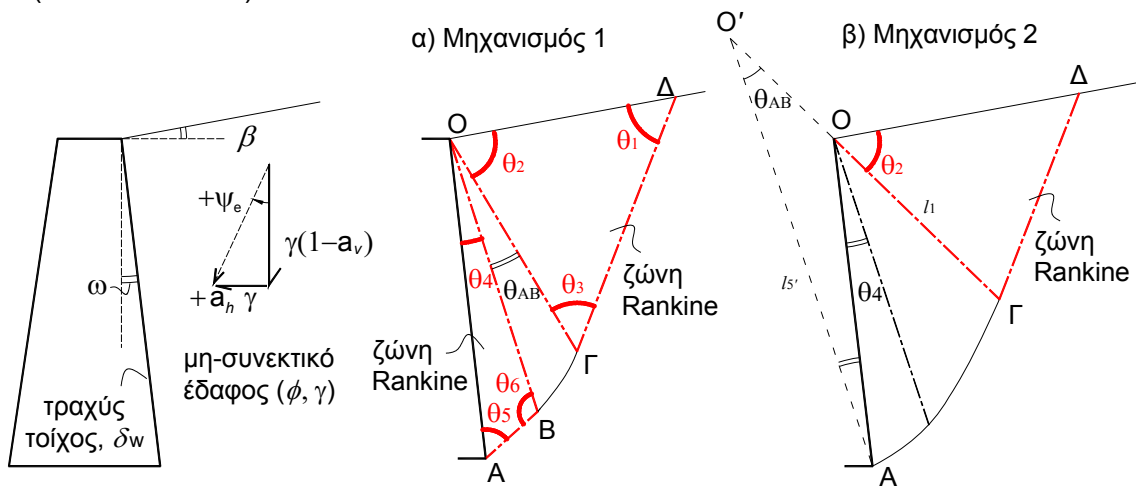
Παρόμοιοι μηχανισμοί λογαριθμικής σπείρας, με ευθύγραμμα τμήματα που να ακολουθούν τη γεωμετρία της λύσης Rankine για βαρυτικές συνθήκες, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρύτατα, ξεκινώντας από τον Terzaghi (1943). Πιο πρόσφατα, βελτιστοποιημένοι μηχανισμοί αυτού του είδους έχουν παρουσιαστεί από τους Kumar & Subba Rao (1997), Kumar (2001), Murthy (2003) και Kame et al. (2010). Λύσεις λογαριθμικής σπείρας με σεισμό για ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις με τυχαίους μηχανισμούς έχουν δημοσιευτεί από τους Chen & Liu (1990) και πιο πρόσφατα για παθητικές ωθήσεις από τους Morrison & Ebeling (1995), Kumar (2001) και Subba Rao & Choudhury (2005). Επίσης έχουν προταθεί μηχανισμοί που αποτελούνται εξολοκλήρου από λογαριθμική σπείρα, όπως η λύση των Soubra & Macuh (2002). Η μοναδική υβριδική λύση που λαμβάνει υπόψη τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων για σεισμικές συνθήκες, έχει δημοσιευτεί από τους Shamsabadi et al (2013), αλλά είναι εξαιρετικά πολύπλοκη με χρήση πολυπρισματικού μηχανισμού και επιπλέον ικανοποιεί αποτελεσματικά μόνο τη συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του επιχώματος.

2.1. Μηχανισμός 1: Δύο ζώνες Rankine με παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα

Ο μηχανισμός του Σχήματος 2α, αποτελείται από την τριγωνική σφήνα OΔΓ από τη ζώνη του απειρομήκους πρανούς, την τριγωνική σφήνα OBA από τη ζώνη της διεπιφάνειας τοίχου-εδάφους και τη λογαριθμική σπείρα OBG με γνωστό άνοιγμα θ_{AB} (Εξίσωση 1) που εκφράζει την περιστροφή των κυρίων επιπέδων και των χαρακτηριστικών των τάσεων μεταξύ των δύο προηγούμενων, γνωστών περιοχών Rankine (Mylonakis et al., 2007). Τα ευθύγραμμα τμήματα του μηχανισμού προκύπτουν από τις χαρακτηριστικές των τάσεων (έντονες διακεκομμένες κόκκινες γραμμές) των κύκλων Mohr του Σχήματος 1, από τους οποίους εξαγονται οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές γωνίες $\theta_1 - \theta_6$ (Εξισώσεις 2 - 5). Τα σχήματα και όλες οι εξισώσεις που ακολουθούν αντιστοιχούν στον ενεργητικό μηχανισμό αστοχίας για θετικές τιμές φ και δ_w , αλλά μεταπίπτουν αβίαστα στον παθητικό μηχανισμό με αλλαγή προσήμου (αρνητικές τιμές) φ και δ_w .



Σχήμα 1. Γεωμετρία τανυστή τάσεων και χαρακτηριστικών στην περιοχή του πρανούς και στη διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους (ενεργητική κατάσταση)
 Figure 1. Geometry of stress tensor and characteristics in the slope and soil-wall interface area (active condition)



Σχήμα 2. Μηχανισμοί αστοχίας: (α) δύο ζώνες Rankine με παρεμβαλλόμενη λογαριθμική σπείρα, (β) μία ζώνη Rankine με συνεχόμενη λογαριθμική σπείρα (ενεργητική κατάσταση)
 Figure 2. Failure mechanisms: (a) two Rankine zones with transition log-spiral (b) one Rankine zone with continuous log-spiral (active condition)

$$\theta_{AB} = \frac{1}{2} [(\Delta_2 - \delta_w) - (\Delta_{1e} - \beta) - 2\omega - \psi_e] \quad (1)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} - \frac{\Delta_1 + \beta}{2} - \frac{\psi_e}{2} \quad (2)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \phi - \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_1 + \beta}{2} + \frac{\psi_e}{2} \quad (3)$$

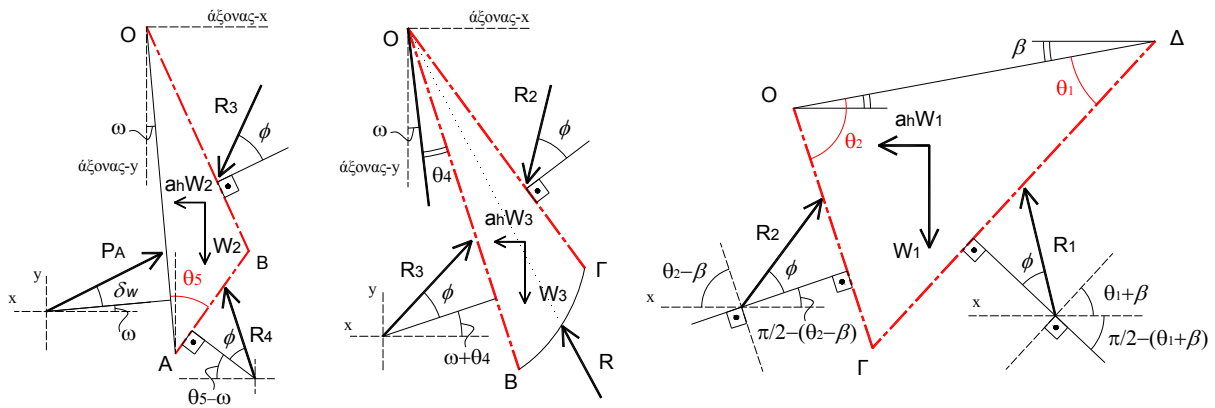
$$\theta_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{\Delta_2 - \delta_w}{2} \quad (4)$$

$$\theta_5 = \frac{\pi}{2} - \phi - \theta_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_2 - \delta_w}{2} \quad (5)$$

Οι γωνίες μεταξύ των χαρακτηριστικών είναι $\theta_3=45-\phi/2$, $\theta_6=45+\phi/2$. Στις παραπάνω εξισώσεις β είναι η κλίση του πρανού, ω η κλίση του τοίχου, δ_w η τραχύτητα της διεπιφάνειας τοίχου-εδάφους, $\Delta_1 = \sin^{-1}[\sin(\beta+\psi_e)/\sin\phi]$ και $\Delta_2 = \sin^{-1}(\sin\delta_w/\sin\phi)$ οι βοηθητικές γωνίες Caquot και $\psi_e = \tan^{-1}[a_h/(1-a_v)]$ η κλίση της συνισταμένης βαρυτικής-αδρανειακής δράσης.

Με γνωστές τις γωνίες του μηχανισμού αστοχίας θ_i είναι εύκολος ο υπολογισμός των μηκών l_i (οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες θ_i) με τη βοήθεια του νόμου των ημιτόνων, ξεκινώντας από το γνωστό ύψος του τοίχου, H . Μεταξύ των δύο τριγώνων χρησιμοποιείται λογαριθμική σπείρα με κέντρο στο σημείο O (άνω άκρο του τοίχου), της μορφής $r = r_0 e^{\theta \tan \phi}$, η οποία αναπαριστά καμπύλη επιφάνεια αστοχίας, αφού σε κάθε σημείο ισχύει $\tau/\sigma_n = \tan \phi$. Σε συνδυασμό με την ιδιότητα ότι κάθε ακτίνα της σπείρας σχηματίζει γωνία $90 - \phi$ με την εφαπτομένη στο ίδιο σημείο, προκύπτει ότι η προέκταση του διανύσματος της συνισταμένης εξωτερικής αντίδρασης σε κάθε σημείο της σπείρας διέρχεται από το σημείο O (Murthy, 2003). Αυτό είναι βολικό για την εφαρμογή της μεθόδου οριακής ισορροπίας, καθώς η άγνωστη εξωτερική αντίδραση δεν παράγει ροπή ως προς το σημείο O . Βέβαια, πρέπει να τονιστεί ότι η συγκεκριμένη επιλογή σπείρας με γωνία ϕ δεν είναι δεσμευτική, ιδιαίτερα αν εφαρμοστεί κινηματική μέθοδος άνω ορίου που βασίζεται στην εξίσωση έργων αντί για ισορροπία δυνάμεων και ροπών (Chen & Liu, 1990).

Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται η ισορροπία στα επιμέρους πρίσματα του μηχανισμού. Αρχικά λαμβάνεται η ισορροπία δυνάμεων στο πρίσμα $O\Gamma\Delta$ και υπολογίζονται οι δύο άγνωστες αντιδράσεις R_1 και R_2 , στη συνέχεια ισορροπία ροπών στο πρίσμα $O\Gamma\Delta$ και υπολογίζεται η αντίδραση R_3 και τέλος με ισορροπία δυνάμεων στο πρίσμα OAB υπολογίζεται η αντίδραση R_4 και η ενεργητική ώθηση P_A (Εξισώσεις 6 έως 14). Η διαδικασία παρουσιάζεται αναλυτικότερα από τους Φόη (2010) και Κλουκίνα (2012).



Σχήμα 3. Ισορροπία δυνάμεων και ροπών στα πρίσματα του μηχανισμού αστοχίας
Figure 3. Equilibrium of forces and moments on the wedges of the failure mechanism

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_6} \sin \theta_5 \frac{\gamma H^2}{\cos^2 \omega} \quad (6)$$

$$W_3 = \int_0^{\theta_{AB}} \frac{1}{2} \gamma l_s^2 e^{-2\theta \tan \phi} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_5}{\sin^2 \theta_6} \gamma H^2 \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{1 - e^{-2\theta_{AB} \tan \phi}}{2 \tan \phi} \right) \quad (7)$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\sin^2 \theta_5}{\sin^2 \theta_6} \frac{\gamma H^2}{\cos^2 \omega} e^{-2\theta_{AB} \tan \phi} \quad (8)$$

$$R_1 = \frac{W_1 - R_2 \cos(\theta_2 - \beta - \phi)}{\cos(\theta_1 + \beta - \phi)} \quad (9)$$

$$R_2 = \frac{W_1[\tan(\theta_1 + \beta - \phi) + a_h]}{\sin(\theta_2 - \beta - \phi) + \cos(\theta_2 - \beta - \phi) \tan(\theta_1 + \beta - \phi)} \quad (10)$$

$$\Sigma M_3 = \frac{1}{3} \frac{\sin^3 \theta_5}{\sin^3 \theta_6} \gamma H^3 \frac{1}{\cos^3 \omega} \left[\frac{\cos(\theta_4 + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \omega) - e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [\cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + 3 \tan \phi \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi} \right. \\ \left. + a_h \frac{3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \omega) - \sin(\theta_4 + \omega) + e^{-3 \tan \phi \theta_{AB}} [-3 \tan \phi \cos(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega) + \sin(\theta_4 + \theta_{AB} + \omega)]}{1 + 9 \tan^2 \phi} \right] \quad (11)$$

$$R_3 = \frac{3 \Sigma M_3}{2 l_5 \cos \phi} + R_2 e^{-\theta_{AB} \tan \phi} \quad (12)$$

$$R_4 = \frac{P_A \cos(\delta + \omega) - a_h W_2 - R_3 \cos(\theta_4 + \omega + \phi)}{\cos(\theta_5 - \omega + \phi)} \quad (13)$$

$$P_A = \frac{W_2 [1 + a_h \tan(\theta_5 - \omega + \phi)] + R_3 [\sin(\theta_4 + \omega + \phi) + \cos(\theta_4 + \omega + \phi) \tan(\theta_5 - \omega + \phi)]}{\sin(\delta + \omega) + \cos(\delta + \omega) \tan(\theta_5 - \omega + \phi)} \quad (14)$$

2.2. Μηχανισμός 2: μία ζώνη Rankine με συνεχόμενη λογαριθμική σπείρα μέχρι τον τοίχο

Στον μηχανισμό του Σχήματος 2β, το κέντρο της σπείρας είναι μετατοπισμένο στην προκαθορισμένη θέση O' που ορίζει το σημείο τομής της προέκτασης της χαρακτηριστικής OG με την $O'A$, η οποία είναι παράλληλη στην χαρακτηριστική OB και καταλήγει στη βάση του τοίχου. Με αυτόν τον τρόπο η λογαριθμική σπείρα εξακολουθεί να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων στα σημεία A και Γ και να διατηρεί σταθερό το άνοιγμά της, ίσο με θ_{AB} . Τα σημεία O και O' ταυτίζονται στη μοναδική περίπτωση που η επιφάνεια του τοίχου OA είναι χαρακτηριστική, δηλαδή όταν $\delta_w = \phi$, οπότε οι δύο μηχανισμοί ταυτίζονται. Η γεωμετρία του νέου τριγωνικού πρίσματος $O\Gamma\Delta$ είναι διαφορετική από αυτή του προηγούμενου μηχανισμού, καθώς οι διαστάσεις του καθορίζονται από το νέο μήκος l_1' που προκύπτει από τη νέα λογαριθμική σπείρα. Επίσης, δεν υπάρχει το τριγωνικό πρίσμα OAB , αλλά πρέπει να υπολογιστεί και να αφαιρεθεί το νοητό τρίγωνο $O'AO$, που αποτελεί τμήμα της νέας σπείρας. Αν κάποιος αγνοήσει τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων όπως συνήθως γίνεται στις κινηματικές λύσεις, τότε η θέση του πόλου O' αποτελεί παράμετρο προς βελτιστοποίηση και μπορεί να κινείται πάνω στην ευθεία $O'\Gamma$, δεξιά ή αριστερά του O , αν διατηρηθεί ο περιορισμός της ζώνης Rankine στο επίχωμα (Murthy, 2003) ή και σε οποιαδήποτε άλλη θέση τυχαία στο επίπεδο (Soubra & Macuh, 2002). Οι σχετικές εξισώσεις για το συγκεκριμένο μηχανισμό παρουσιάζονται από τους Φόη (2010) και Κλουκίνα (2012).

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται αποτελέσματα για ενεργητικές και παθητικές βαρυτικές ωθήσεις (K_{AV} , K_{PV}) από τις παρούσες λύσεις και από γνωστές λύσεις της βιβλιογραφίας. Στις στήλες του πίνακα μπορεί να παρατηρηθεί η αύξουσα διάταξη στις τιμές του K_{AV} και η αντίστοιχη φθίνουσα στις τιμές του K_{PV} που αντικατοπτρίζει τη μη-συντηρητική φύση των λύσεων οριακής ισορροπίας και των κινηματικών λύσεων άνω ορίου, και τη συντηρητική φύση των μεθόδων ανάλυσης τάσεων (γραμμές διαρροής, μέθοδος κάτω ορίου). Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι ο προτεινόμενος μηχανισμός 1 είναι αρκετά μη-συντηρητικό άνω όριο, ενώ ο μηχανισμός 2 είναι αρκετά βελτιωμένο άνω όριο σε σχέση με άλλες κλασικές λύσεις, όπως η λύση Coulomb και η λύση Chen & Liu αντίστοιχα. Ωστόσο, δεν παρέχει βελτίωση στην περίπτωση $\delta_w = \phi$ που ταυτίζεται με τον μηχανισμό 1. Επίσης ο μαθηματικός τύπος του καταρρέει στην απλή περίπτωση Rankine ($\theta_{AB}=0$), όπως είναι οι περιπτώσεις $\delta_w/\phi = 0$ του Πίνακα 1.

Αποτελέσματα για βαρυτικές και σεισμικές παθητικές ωθήσεις από την παρούσα λύση παρουσιάζονται στο Σχήμα 4, συγκριτικά με ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου των γραμμών διαρροής. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα των Kerisel & Absi (1990) για την περίπτωση των βαρυτικών ωθήσεων και του Cheng (2003) για την περίπτωση των σεισμικών ωθήσεων. Επίσης στα γραφήματα απεικονίζονται οι προβλέψεις της λύσης κάτω ορίου των Mylonakis et al (2007), που είναι πάντοτε αρκετά συντηρητικές. Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι ο μηχανισμός 2 βρίσκεται πολύ κοντά στις προβλέψεις της μεθόδου των γραμμών διαρροής για την περίπτωση $\delta=\varphi/2$, ενώ ο μηχανισμός 1 είναι πάντοτε ένα αρκετά μη-συντηρητικό άνω όριο. Η πιο ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι ο απλός μέσος όρος της λύσης άνω ορίου του μηχανισμού 1 με την αντίστοιχη κάτω ορίου των Mylonakis et al (2007) βρίσκεται πάντοτε σε εξαιρετική συμφωνία με τις ακριβείς τιμές της μεθόδου των γραμμών διαρροής.

Πίνακας 1. Σύγκριση αποτελεσμάτων για βαρυτικές ενεργητικές και παθητικές εδαφικές ωθήσεις από διάφορες μεθόδους. $\omega = \beta = 0$ (Τροποποιημένο από Chen & Liu, 1990)
Table 1. Comparison of results for gravitational active and passive earth pressures by various methods (modified from Chen & Liu, 1990)

a. K_{Ay} – values†

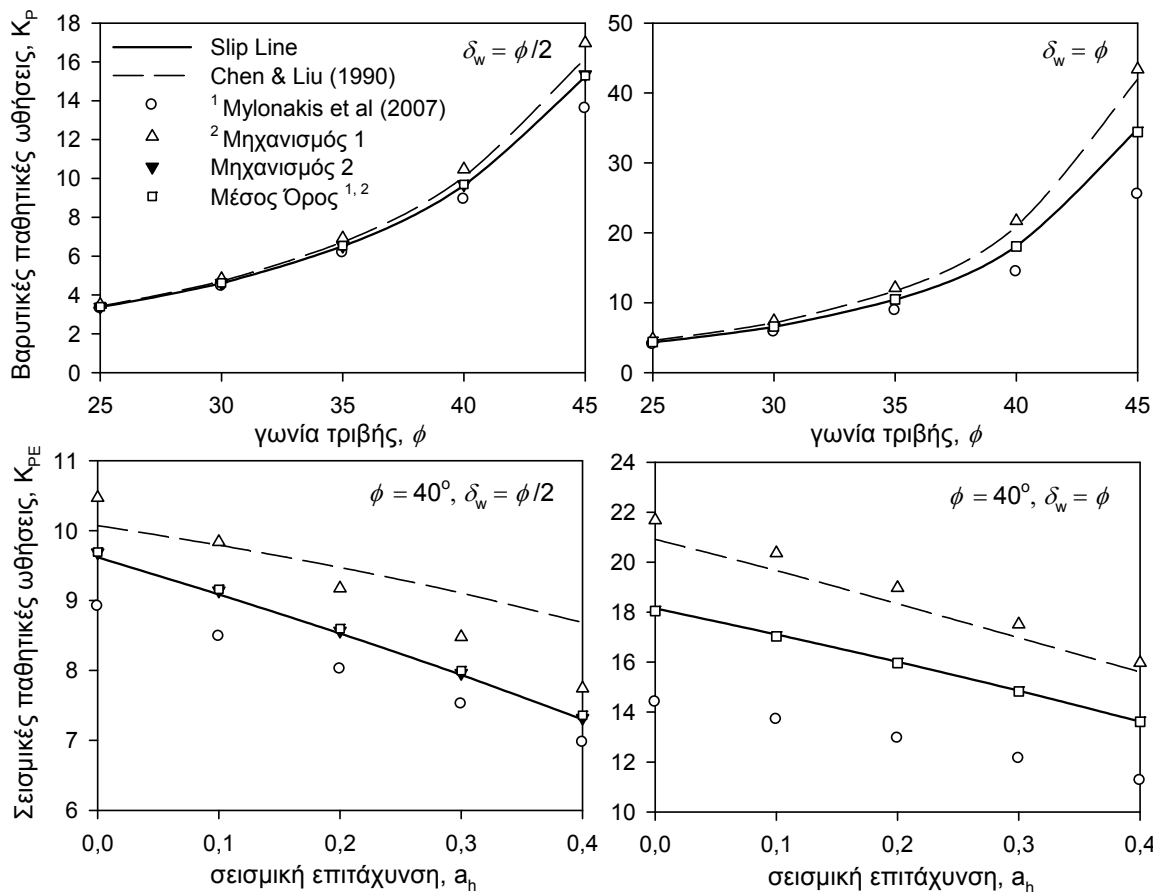
φ - δ / φ	20°			30°			40°		
	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
LE (Coulomb, 1776)	0.49	0.447	0.427	0.33	0.301	0.297	0.217	0.199	0.210
LE (Μηχανισμός 1)	0.49	0.446	0.420	0.33	0.301	0.289	0.217	0.199	0.202
UB (Chen & Liu 1990)	0.49	0.448	0.434	0.33	0.303	0.302	0.217	0.200	0.214
LE (Μηχανισμός 2)	-	0.449	0.420	-	0.303	0.289	-	0.201	0.202
SL (Sokolovskii 1965)	0.49	0.450	-	0.33	0.300	-	0.220	0.200	-
SL (Caquot & Kerisel, 1948)	0.49	-	0.440	0,33	-	0.308	0.217	-	0.219
LB (Mylonakis et al., 2007)	0.49	0.451	0.449	0.33	0.305	0.315	0.217	0.201	0.224

b. K_{Py} – values‡

LE (Coulomb, 1776)	2.04	2.64	3.53	3.00	4.98	10.1	4.60	11.77	92.6
LE (Μηχανισμός 1)	2.04	2.62	3.27	3.00	4.82	7.37	4.60	10.47	21.69
UB (Chen & Liu, 1990)	2.04	2.58	3.17	3.00	4.70	7.10	4.60	10.07	20.9
LE (Μηχανισμός 2)	-	2.56	3.27	-	4.62	7.37	-	9.69	21.69
LE (Morrison & Ebeling, 1995)	-	-	-	3,00	4,62	7,08	-	-	-
UB (Soubra, 2000)	2,04	2,58	3,12	3,00	4,69	6,86	4,60	9,99	19,6
LE (Subba Rao, 2005)	-	-	-	3,00	4,62	6,68	-	-	-
UB (Kumar, 2001)	-	-	-	3,00	-	6,68	4,60	-	18,9
SL (Cheng, 2003)	-	-	-	3,00	-	6,56	-	-	18,2
SL (Sokolovskii 1965)	2,04	2,55	3,04	3,00	4,62	6,55	4,60	9,69	18,2
SL (Caquot & Kerisel, 1948)	2.05	2.55	3.10	3.00	4.60	6.50	4.60	9.60	18.0
LB (Mylonakis et al., 2007)	2.04	2.52	2.87	3.00	4.44	5.80	4.60	8.92	14.4

$$\dagger K_{Ay} = P_A / \frac{1}{2} \gamma H^2, \quad \ddagger K_{Py} = P_p / \frac{1}{2} \gamma H^2$$

όπου: UB = Upper Bound, LB = Lower Bound, LE = Limit Equilibrium, SL = Slip Line



Σχήμα 4. Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για βαρυτικές και σεισμικές παθητικές ωθήσεις, από διάφορες μεθόδους

Figure 4. Comparison of results for gravitational and seismic passive earth pressures by various methods

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε υβριδική λύση άνω ορίου για τον ακριβέστερο υπολογισμό των εδαφικών ωθήσεων, με συνδυασμό της μεθόδου της οριακής ισορροπίας και της οριακής ανάλυσης τάσεων (θεωρία κάτω ορίου). Οι θεωρούμενοι μηχανισμοί αστοχίας ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων και στα δύο άκρα του μηχανισμού, την ελεύθερη επιφάνεια του πρανούς και την διεπιφάνεια τοίχου-εδάφους. Η ανάλυση καταλήγει σε απλές, πλήρως συμμετρικές μαθηματικές εκφράσεις κλειστής μορφής, χωρίς ανάγκη βελτιστοποίησης, οι οποίες μπορούν πολύ εύκολα να χρησιμοποιηθούν για πρακτικές εφαρμογές, με τη μορφή ενός υπολογιστικού φύλλου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της λύσης δείχνουν πολύ καλή ακρίβεια συγκρινόμενα με καθιερωμένες λύσεις αριθμητικού χαρακτήρα. Η βελτίωση είναι ιδιαίτερα αισθητή στην περίπτωση των παθητικών ωθήσεων, ειδικά για τον μηχανισμό αστοχίας που περιλαμβάνει μία μόνο ζώνη Rankine (ελεύθερη επιφάνεια) και λογαριθμική σπείρα μέχρι τον τοίχο. Αντίθετα, ο μηχανισμός με τις δύο τριγωνικές ζώνες Rankine καταλήγει σε πιο σταθερό μαθηματικό τύπο και - παρότι οι προβλέψεις του είναι εξαιρετικά μη ασφαλείς - ο μέσος όρος τους με τις αντίστοιχα εξαιρετικά ασφαλείς προβλέψεις της τασικής λύσης των Mylonakis et al. (2007), πρακτικά ταυτίζεται με τις ακριβείς αριθμητικές τιμές. Η ιδέα του υπολογισμού του οριακού φορτίου μέσω ενός μέσου όρου δύο απλών λύσεων κλειστής μορφής, είναι ιδιαίτερα ελκυστική για πρακτικές εφαρμογές.

5. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος

«Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κλουκίνας, Π. (2012). "Συμβολή στη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Τοίχων Αντιστήριξης Μέσω Θεωρητικών και Πειραματικών Μεθόδων", Δ.Δ., Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π.Π.
- Φόη, Α.Μ. (2010). "Βαρυτικές και Σεισμικές Ωθήσεις Γαιών: Ιστορική Αναδρομή, Λύσεις Οριακής Ισορροπίας & Ανάλυσης Τάσεων", Διπλωματική Εργασία, Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π. Π.
- Caquot, A. and Kerisel, J. (1948). "Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations". *Librairie du Bureau des Longitudes, Ecole Polytechnique, Paris Gauthier - villars* (Translated from French by Maurice A. Bec.)
- Chen, W.F. and Liu, X.L. (1990). "*Limit Analysis in Soil Mechanics*", Elsevier, Amsterdam
- Cheng, Y.M. (2003). "Seismic Lateral Earth Pressure Coefficients for c-φ Soils by Slip Line Method", *Computers and Geotechnics*, 30, pp. 661-670.
- Coulomb, C.A. (1776). "Essai sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Stratique Relatifs a l' Architecture". *Memoires de Mathematiqueet de Physique, Presentes a l' Academie Royale des Sciences*; Paris, Vol. 7, pp. 343-382.
- Kame, G.S., Dewaikar, D.M. and Choudhury, D. (2010). "Active Thrust on a Vertical Retaining Wall with Cohesionless Backfill", *Electronic Journal of Geotechnical Engineering-EJGE*, Vol. 15, pp.1848-1863.
- Kerisel, J. and Absi, E. (1990). "*Active and Passive Earth Pressure Tables*" A.A. Balkema
- Kumar, J. (2001). "Seismic passive earth pressure coefficients for sands", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 38 (4), pp. 876–81.
- Kumar, J. and Subba Rao, K.S. (1997). "Passive Pressure Coefficients, Critical Failure Surface and its Kinematic Admissibility", *Geotechnique*, 47:1, 185-192.
- Lancellotta, R. (2007). "Lower-Bound Approach for Seismic Passive Earth Resistance". *Geotechnique*, Vol. 57, No. 3, pp. 319-321.
- Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). "On the Determination of Earth Pressure During Earthquakes". *Proc. of the World Engineering Congress*, Tokyo, Vol. 9, pp. 179-185.
- Morrison, E.E. and Ebeling, R.M. (1995). "Limit Equilibrium Computation of Dynamic Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal*, 32:3, 481-487.
- Murthy, V.N.S. (2003). "*Geotechnical Engineering: Principles and Practices of Soil Mechanics and Foundation Engineering*", Marcel Dekker, Inc., 1029p.
- Mylonakis, G., Kloukinas, P. and Papantonopoulos, C. (2007). "An Alternative to the Mononobe–Okabe Equations for Seismic Earth Pressures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 27, Issue 10, Pages 957-969.
- Okabe, S. (1926). "General Theory on Earth Pressure", *Journal of the Japanese Society of Civil Engineers Tokyo, Japan*, Vol. 12, No. 1.
- Rankine, W.J.M. (1857). "On the Stability of Loose Earth", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 147, pp. 9 – 27.
- Shamsabadi A, Xu SY and Taciroglu E (2013). "A generalized log-spiral Rankine limit equilibrium model for seismic earth pressure analysis", *Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, 49: 197–209.
- Sokolovskii, V.V. (1965). "*Statics of Granular Media*". NewYork : Pergamon. 270 pp.
- Soubra, A.H. (2000). "Static and Seismic Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal* , 37, pp. 463-478.
- Soubra, A.H. and Macuh, B (2002). "Active and Passive Earth Pressure Coefficients by a Kinematical Approach", *Geotechnical engineering*, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol. 155 No 2, pp119-131.
- Subba, Rao, K.S. and Choudhury, D.S.M. (2005). "Seismic Passive Earth Pressures in Soils", *Journal of geotech. and geoenvironmental engineering*, ASCE, 131(1), 131-135.
- Terzaghi, K. (1943). "*Theoretical Soil Mechanics*", John Wiley and Sons, New York.

Οριακή Ανάλυση Ριπιδίου Τάσεων σε Μη-Συνεκτικό Έδαφος με Ίδιον Βάρος, με Χρήση Τασικών Συναρτήσεων

Limit Analysis of a Stress Fan in Frictional Soil with Self-weight, by means of Stress Functions

ΚΛΟΥΚΙΝΑΣ, Π.
ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Α-Ν.
ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ, Γ.Ε.

Πολιτικός Μηχανικός, Μεταδιδ. Ερευνητής, Π. Bristol
Πολιτικός Μηχανικός, Υποψ. Διδάκτωρ, ΕΤΗ Zurich
Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής, Π. Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Ο προσδιορισμός των οριακών τάσεων πλαστικοποίησης στο εσωτερικό εδαφικής σφήνας επί της οποίας ενεργούν δυνάμεις πεδίου, αποτελεί ένα από τα κλασικότερα και πλέον δυσεπίλυτα προβλήματα της Γεωτεχνικής Μηχανικής. Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας και του κριτηρίου αστοχίας στο ριπίδιο των τάσεων, γνωστού και ως «ζώνη Boussinesq» επιλύεται παραδοσιακά με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών («γραμμών ολίσθησης»). Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση οριακής ανάλυσης τάσεων, η οποία απλοποιεί το πρόβλημα σε μία μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση και επιτρέπει έτσι την επίλυση με σχετικά απλές αριθμητικές ή ημιαναλυτικές μεθόδους.

ABSTRACT: Determining limit stresses in a soil wedge which is in plastic equilibrium at all points under the action of body forces, is among the most difficult problems in geomechanics. The equations of equilibrium combined with the failure criterion within the stress fan, known as the «Boussinesq zone», is traditionally solved by the Method of Characteristics («Slip line»). In the work at hand, a new limit stress approach is presented which drastically simplifies the problem into a single ordinary differential equation, which is easier to tackle by numerical or semi-analytical methods.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

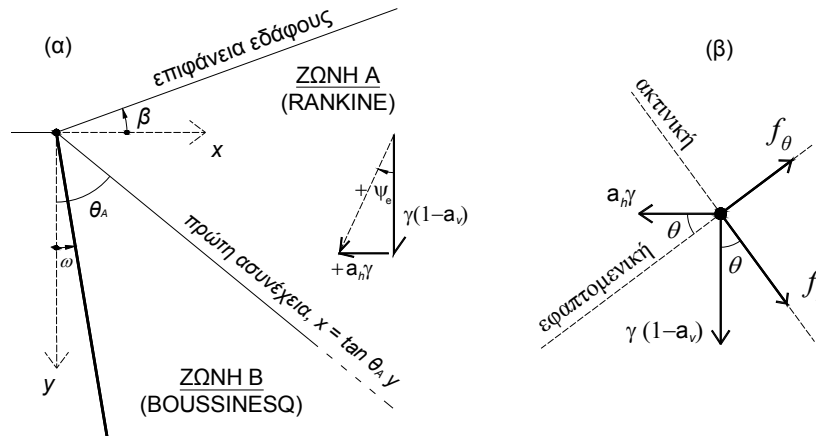
Παρότι η θεωρία της οριακής ανάλυσης εξελίσσεται συνεχώς κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες, το πρόβλημα του συντελεστή φέρουσας ικανότητας θεμελίου λόγω ιδίου βάρους, δηλαδή του συντελεστή N_γ και το συγγενικό πρόβλημα του προσδιορισμού των ωθήσεων γαιών, δηλαδή των συντελεστών K_γ , παραμένει ακόμα άλυτο σε κλειστή μαθηματική μορφή. Οι κλασικές εργασίες των Coulomb (1776) και Rankine (1857) θεμελίωσαν δυο παράλληλες σχολές στην οριακή ανάλυση (Sokolovskii, 1965). Η εργασία του Coulomb, πέρα από την καταλυτική συμβολή με τον ορισμό της έννοιας της διαμητρικής αντίστασης του εδάφους και της οριακής κατάστασης ισορροπίας, εισήγαγε μια γενική μέθοδο μέσω μηχανισμών αστοχίας και μαθηματικής βελτιστοποίησης, η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα μέχρι σήμερα.

Η δεύτερη σχολή που θεμελιώθηκε από τον Rankine (1857) επιχειρεί την αυστηρή μαθηματική ανάλυση της κατάστασης οριακής ισορροπίας, χωρίς τη χρήση αυθαίρετων μηχανισμών αστοχίας, υπό την παραδοχή ότι το έδαφος διαρρέει σε όλα τα σημεία. Ο Rankine χρησιμοποιεί τις σχέσεις του τανυστικού μετασχηματισμού των τάσεων και μαθηματικά στοιχεία διαφορικού λογισμού και επιλύει την περίπτωση ενός απειρομήκους πρηνούς από μη συνεκτικό έδαφος. Παρόμοιες προσπάθειες δημοσιεύτηκαν από τους Levy (1873) και Saint-Venant (1870), οι οποίοι διαπίστωσαν τη δυσκολία επίλυσης του

προβλήματος όταν ληφθούν υπόψη ταυτόχρονα το ίδιο βάρος και η τραχύτητα του τοίχου. Ο Boussinesq (1882) είναι ο πρώτος που επιχειρεί να το επιλύσει μέσω δύο διακριτών ζωνών: μιας στην περιοχή του πρανούς στην οποία ισχύει η λύση Rankine, και μιας δεύτερης (ζώνη Boussinesq) μέχρι τον τοίχο εντός της οποίας οι τάσεις αναζητούνται αναλυτικά. Παρότι δεν κατάφερε να δώσει ικανοποιητική λύση, η εργασία του Boussinesq αποτελεί σταθμό στην οριακή ανάλυση, καθώς εισάγει την έννοια της ασυνέχειας των τάσεων. Στο πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα ασχολήθηκαν συστηματικά με το πρόβλημα της πλαστικής ισορροπίας κορυφαίοι επιστήμονες όπως οι Kötter (1903), von Karman (1927) και Caquot (1934), Sokolonskii (1939 - 1957). Οι εργασίες τους συνέβαλαν στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος, και συνεισέφεραν σειρά αξιόπιστων προσεγγιστικών λύσεων, ώστε να το καταστήσουν επιλύσιμο με αριθμητικές μεθόδους (Martin, 2005).

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση στο πρόβλημα του Boussinesq, σε πιο γενικευμένη μορφή, με κεκλιμένο τοίχο (ω) και επίχωμα (β) και συνδυασμένη βαρυτική και σεισμική φόρτιση, υπό τη σεισμική γωνία ψ_e (Σχήμα 1α). Το εδαφικό υλικό είναι μη συνεκτικό και χαρακτηρίζεται από το ειδικό βάρος γ και τη γωνία τριβής ϕ . Η μέθοδος παρουσιάζεται διεξοδικά από τους Δημητρακόπουλο (2011) και Κλουκίνα (2012).



Σχήμα 1. (α) Το υπό εξέταση πρόβλημα (β) Δυνάμεις πεδίου σε πολικές συντεταγμένες
Figure 1. (a) The problem under consideration (b) Body forces in polar coordinates

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, η κλίση της χαρακτηριστικής των τάσεων θ_A που διαχωρίζει τις ζώνες Rankine και Boussinesq ως προς την κατακόρυφη, δίνεται από την Εξίσωση 1

$$\theta_A = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_1 + \beta - \psi_e}{2} \quad (1)$$

όπου $\Delta_1 = \sin^{-1}[\sin(\beta + \psi_e)/\sin\phi]$ και $\psi_e = \tan^{-1}[a_h/(1 - a_v)]$. Θεωρώντας ολόκληρη την εδαφική μάζα σε κατάσταση διαρροής, οφείλουν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξισώσεις ισορροπίας και το κριτήριο αστοχίας. Οι πρώτες, εκφρασμένες σε πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις Εξισώσεις 2α,β

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = f_r \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = f_\theta \quad (2\alpha, \beta)$$

όπου $f_r = \gamma \cos(\theta + \psi_e)/\cos\psi_e$ και $f_\theta = -\gamma \sin\theta(1 + \tan\psi_e/\tan\theta)$ η ακτινική και η εφαπτομενική συνιστώσα των δυνάμεων πεδίου (Σχήμα 1β). Για υλικό χωρίς συνοχή, το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr - Coulomb σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = \sin^2\phi(\sigma_r + \sigma_\theta)^2 \quad (3)$$

Η κλασική επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (Sokolovskii, 1965, Salençon 1977). Εάν οι εξισώσεις των τάσεων αστοχίας εισαχθούν στις εξισώσεις ισορροπίας, προκύπτει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, το οποίο είναι ολοκληρώσιμο πάνω σε χαρακτηριστικές οικογένειες τεμνόμενων καμπυλών όταν το πρόβλημα αφορά μη-ομογενή πεδία, δηλαδή περιοχές στις οποίες οι συναρτήσεις δεν έχουν συνεχείς παραγώγους (Abbot, 1967). Το τελικό σύστημα εξισώσεων απαιτεί αριθμητική επίλυση με χρήση καννάβου πεπερασμένων διαφορών. Ειδικότερες περιπτώσεις αποτελούν η περίπτωση των ημι-ομογενών πεδίων στα οποία η μία οικογένεια χαρακτηριστικών είναι ευθύγραμμη (Prandtl, 1923; Reissner, 1924), όπως είναι το πρόβλημα του υλικού χωρίς βάρος και η περίπτωση των ομογενών πεδίων στα οποία και οι δύο οικογένειες είναι ευθύγραμμες, όπως είναι η ζώνη Rankine.

3. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η πρώτη απλοποίηση αφορά την ανάλυση του προβλήματος με τη βοήθεια μίας μόνο διαφορικής εξίσωσης. Αυτό γίνεται εφικτό με την εισαγωγή μιας άγνωστης συνάρτησης δυναμικού $\Phi = \Phi(r, \theta)$ (Airy, 1862), η οποία ικανοποιεί ταυτοτικά τις εξισώσεις ισορροπίας (Εξ 2α, β) αν οι τάσεις γραφούν στην παρακάτω μορφή:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + V, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + V, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (4\alpha, \beta, \gamma)$$

Με V συμβολίζεται η συνάρτηση δυναμικού των δυνάμεων πεδίου, η οποία, ισούται με $V=rf_r$. Αν αντικατασταθούν οι Εξισώσεις 4α-γ στην Εξίσωση 3 λαμβάνεται η ακόλουθη μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού και δευτέρας τάξης με μερικές παραγώγους

$$4 \left(\frac{1}{r} \Phi_\theta \right)_r^2 + \left(\frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{rr} \right)^2 = \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} + \Phi_{rr} + 2rf_r \right)^2 \quad (5)$$

όπου Φ_i, Φ_{ij} οι μερικές παράγωγοι της Φ ως προς τους αναγραφόμενους δείκτες. Η συγκεκριμένη εξίσωση, έχει δημοσιευτεί σε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, χωρίς να δίνεται λύση, από τους Levy (1873) και Saint-Venant (1870). Διάφορες προσεγγίσεις για να απλοποιηθεί η παραπάνω έκφραση έχουν προταθεί από τους Nadai (1963), Malyshev (1969) και Azarou (1975). Η διατύπωση του προβλήματος σε πολικές συντεταγμένες επιτρέπει μια σημαντική απλοποίηση με την απαλοιφή της μιας εκ των ανεξάρτητων μεταβλητών, μέσω της ιδιότητας της αυτοομοιότητας (Γεωργιάδης, 2003). Καθώς το πρόβλημα της απειρομήκους σφήνας δεν περιέχει κανένα χαρακτηριστικό μήκος και το μοναδικό χαρακτηριστικό του εδάφους με διαστάσεις είναι το ειδικό βάρος, η μόνη φυσική δυνατότητα είναι η εξάρτηση της λύσης από ένα μονώνυμο του r με δύναμη που να ικανοποιεί διαστατικά τη λύση. Συνεπώς οι τάσεις μπορούν να γραφούν σε διαχωρισμένη μορφή, σύμφωνα με τη σχέση, $\sigma_{ij}=f(r)g(\theta)$ όπου $f(r)$ είναι ένα προσδιορισμένο μονώνυμο της ακτινικής μεταβλητής r . Στο υλικό χωρίς βάρος οι τάσεις δεν εξαρτώνται από το r , ενώ για υλικό με βάρος ισχύει $f(r)=\gamma r$.

Η συγκεκριμένη ιδιότητα έχει εφαρμοστεί στο παρελθόν για την απλοποίηση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας σε σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων που μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά χωρίς τη χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών (Martin, 2005). Αν τώρα εφαρμοστεί η αυτοομοιότητα στη συνάρτηση δυναμικού, προκύπτει $\Phi(r, \theta)=r^2 X(\theta)$ για υλικό χωρίς βάρος και $\Phi(r, \theta)=r^3 X(\theta)$ για το υλικό με βάρος. Βάση αυτής της αντικατάστασης, οι εξισώσεις των τάσεων και η διαφορική εξίσωση (Εξ. 5) μεταπίπτουν στις Εξισώσεις 6, 7 για υλικό χωρίς βάρος και στις Εξισώσεις 8,9 για υλικό με βάρος, αντίστοιχα:

$$\sigma_r = 2X(\theta) + X''(\theta), \quad \sigma_\theta = 2X(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -X'(\theta) \quad (6\alpha, \beta, \gamma)$$

$$4X'(\theta)^2 + X''(\theta)^2 = \sin^2 \varphi [4X(\theta) + X''(\theta)]^2 \quad (7)$$

$$\sigma_r = \gamma r [3X(\theta) + X''(\theta) + \bar{f}_r], \quad \sigma_\theta = \gamma r [6X(\theta) + \bar{f}_r], \quad \tau_{r\theta} = -\gamma r [2X'(\theta)] \quad (8\alpha, \beta, \gamma)$$

$$16X'(\theta)^2 + [-3X(\theta) + X''(\theta)]^2 = \sin^2 \varphi [9X(\theta) + X''(\theta) + 2\bar{f}_r]^2 \quad (9)$$

όπου $\bar{f}_r = f_r / \gamma$. Η Εξίσωση 7 επιλύεται εύκολα μέσω εκθετικής αντικατάστασης, επαληθεύοντας την κλασική λύση του εκθετικού ριπιδίου (Reissner, 1924). Αντίθετα, στην περίπτωση της Εξίσωσης 9 αυτό δεν είναι δυνατό λόγω του όρου $2\bar{f}_r$ που εκφράζει τις δυνάμεις. Οι δύο διαφορικές εξισώσεις διαφέρουν επίσης ως προς τους σταθερούς συντελεστές, το οποίο επιβεβαιώνει ότι δεν ισχύει η ευρέως χρησιμοποιούμενη αρχή της υπέρθεσης των λύσεων για το ίδιο βάρος και την επιφόρτιση (Salencon, 1977).

3.1 Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

Με γνωστές τις τάσεις στη ζώνη Rankine προσδιορίζεται η συνάρτηση δυναμικού που ισχύει στο εσωτερικό της με τη μορφή της Εξίσωσης 10, η οποία αντιστοιχεί σε παθητικές συνθήκες. Οι αντίστοιχες τάσεις για τις ενεργητικές συνθήκες προκύπτουν με απλή αλλαγή του προσήμου της γωνίας φ (Mylonakis et al. 2007). Αναφορικά με τη σεισμική γωνία ψ_e σημειώνεται ότι η κρίσιμη ενεργητική τιμή των τάσεων προκύπτει για θετική γωνία (φορά προς τον τοίχο) ενώ η κρίσιμη παθητική τιμή προκύπτει για αρνητική γωνία (φορά προς το πρανές).

$$X(\theta)_{Rankine} = \frac{1}{6} \left(\cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{1 + \sin \varphi \cos[2(\theta - \theta_{1A})]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} - \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right) \quad (10)$$

Επομένως πάνω στο σύνορο των ζωνών Rankine και Boussinesq (πρώτη ασυνέχεια στο Σχήμα 1) μπορούν να υπολογιστούν η τιμή της συνάρτησης $X(\theta_A)$ και οι παράγωγοί της. Επίσης, εξ ορισμού πάνω στη χαρακτηριστική ισχύει $\tau_{r\theta} / \sigma_\theta = \tan \varphi$. Αυτό αντιστοιχεί σε συνοριακή συνθήκη τύπου Cauchy, που σημαίνει ότι η λύση θα μπορούσε να προκύψει ως ανάπτυγμα Taylor, αν επρόκειτο για πρόβλημα αρχικών τιμών. Όπως απέδειξε ο Caquot (1934) το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από απροσδιοριστία και υπάρχουν άπειρες λύσεις που ικανοποιούν τη συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη. Συνεπώς, για την ορθή επίλυση του προβλήματος, οφείλει να ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη που ισχύει στο άλλο άκρο της ζώνης Boussinesq, επί του τοίχου. Εκεί δεν είναι γνωστή ούτε η τιμή της συνάρτησης $X(\theta)$ ούτε κάποια από τις παραγώγους της, παρά μόνο η κλίση της ώθησης που ισούται με $\tan \delta_w$, όπως υπαγορεύει η απαίτηση αστοχίας της διεπιφάνειας. Επομένως, η συνοριακή συνθήκη γράφεται στη μορφή της Εξίσωσης 12 που αντιπροσωπεύει μια συνθήκη Robin, ως γραμμικός συνδυασμός των συνθηκών Dirichlet και Neumann πάνω σε μια συνοριακή επιφάνεια. Η Εξίσωση 12 μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής Εξίσωσης 13, που ισχύει για κάθε ακτίνα θ . Εάν η κλίση $\delta(\theta)$ ήταν σταθερή, όπως είναι στην περίπτωση του ημι-ομογενούς πεδίου Henky-Prandtl (Prandtl, 1923) τότε η Εξ.13 λύνεται με απλή εκθετική αντικατάσταση, καταλήγοντας έτσι στο γνωστό εκθετικό ριπίδιο της βιβλιογραφίας.

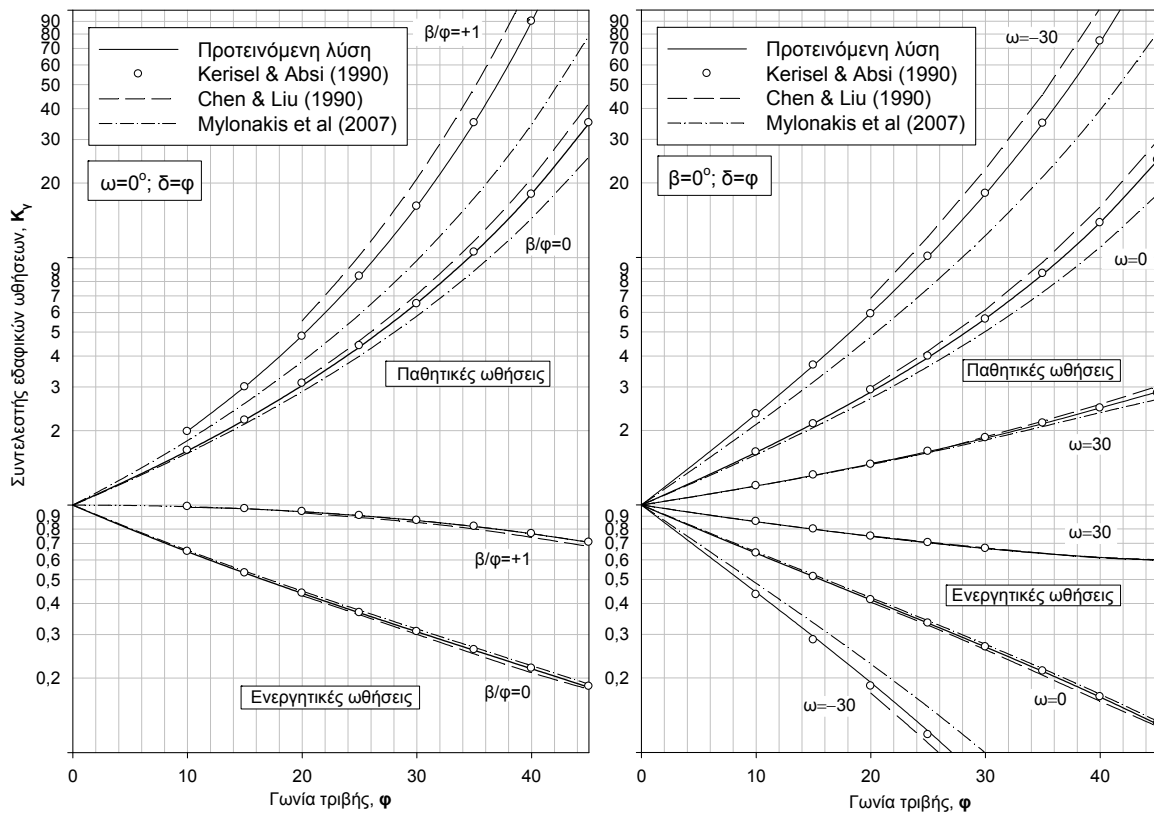
$$\left. \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta} \right|_{\theta=\omega} = \frac{-2X'(\omega)}{6X(\omega) + \bar{f}_r(\omega)} = \tan \delta_w \quad (12)$$

$$X'(\theta) + 3 \tan \delta(\theta) X(\theta) = -\frac{1}{2} \tan \delta(\theta) \bar{f}_r(\theta) \quad (13)$$

Εάν ήταν γνωστή η μεταβολή του λόγου $\tau/\sigma_\theta = \tan \delta(\theta)$ κατά μήκος του ριπιδίου, τότε η Εξίσωση 13 θα μπορούσε να δώσει απευθείας τις τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$, είτε αριθμητικά – είτε ημιαναλυτικά με χρήση της αναλυτικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης για τμηματικά σταθερό δ .

μεταβλητής θ) και δεν απαιτείται διδιάστατος κάρναβος. Το μη-γραμμικό σύστημα που προκύπτει, επιλύεται με την κλασική αριθμητική μέθοδο Newton, η σύγκλιση της οποίας εξαρτάται από την αρχική προσέγγιση (Δημητρακόπουλος, 2011). Μια δεύτερη τεχνική επίλυσης χρησιμοποιεί μια επαναληπτική μέθοδο σύγκλισης που βασίζεται στην επιλογή μια τυχαίας συνάρτησης κλίσης $f(\theta)$ με τη βοήθεια της οποίας υπολογίζονται οι συντελεστές της Εξ. (16) και από αυτήν οι τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$. Από τις τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$ υπολογίζεται η νέα προσέγγιση της $f(\theta)$ μέχρι την τελική σύγκλιση. Η συγκεκριμένη τεχνική αποδεικνύεται εξαιρετικά αξιόπιστη και σταθερή (Κλουκίνας, 2012).

Στο Σχήμα 3, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για βαρυτικές ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις, με τη μορφή των γνωστών νομογραφημάτων Caquot & Kerisel. Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνονται με τα πλέον αξιόπιστα αποτελέσματα των Kerisel & Absi (1990), με τα οποία υπάρχει απόλυτη ταύτιση και με τα αποτελέσματα της κινηματικής οριακής ανάλυσης των Chen & Liu (1990) (άνω όριο) και της οριακής ανάλυσης τάσεων (κάτω όριο) των Mylonakis et al. (2007).



Σχήμα 3. Συγκρίσεις βαρυτικών ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων για διάφορες κλίσεις τοίχου και επιχώματος β και απόλυτα τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$)

Figure 3. Comparison of results for active and passive pressures, for various wall, ω and backfill inclinations, β and rough wall ($\delta = \varphi$)

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται σύγκριση αποτελεσμάτων για σεισμικές παθητικές ωθήσεις σε κατακόρυφο λείο, τραχύ τοίχο ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi$) και οριζόντιο επίχωμα με $\varphi = 30^\circ$ και 40° . Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των λύσεων των Cheng (2003) και Kumar & Chitikela (2002) της μεθόδου των χαρακτηριστικών και επίσης των λύσεων άνω ορίου Kumar (2001) και Soubra (2000). Η συμφωνία με τις δύο πρώτες λύσεις είναι εξαιρετική, ενώ οι επόμενες δύο φυσιολογικά παράγουν μεγαλύτερες τιμές, ειδικά για την περίπτωση $\delta = \varphi$. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου που έχουν προκύψει με χρήση μόλις 100 σημείων διακριτοποίησης, είναι καλύτερα άνω όρια από τη λύση του Cheng (2003) που έχει προκύψει από πυκνό κάρναβο πλευράς 10^{-5} m (500 φορές πυκνότερη διακριτοποίηση σε τόξο που αντιστοιχεί σε ακτίνα αναφοράς 1m).

Πίνακας 1. Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για το σεισμικό συντελεστή παθητικών ωθήσεων γαιών από διάφορες μεθόδους, για $\omega=\beta=0^\circ$ (τροποποιημένο από Cheng, 2003)

Table 1. Comparison of results for the seismic passive earth pressure coefficient, by various methods, for $\omega=\beta=0^\circ$ (modified from Cheng, 2003)

φ (°)	a_h	Προτεινόμενη λύση	Γραμμές Ολίσθησης		Οριακή Ισορροπία			
			Cheng (2003)	Kumar & Chitikela (2002)	Kumar (2001)	Soubra (2000)		
$\delta = 0^\circ$	30°	0	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	
		0,1	2,819	2,821	2,817	2,821	2,820	
		0,2	2,618	2,621	2,610	2,618	2,630	
		0,3	2,392	2,394	2,374	2,393	2,420	
		0,4	2,127	2,130	2,096	2,128	-	
		0,5	1,786	1,792	1,738	1,787	-	
	40°	0	4,599	4,599	4,590	4,599	4,600	
		0,1	4,379	4,381	4,377	4,400	4,380	
		0,2	4,144	4,146	4,138	4,148	4,150	
		0,3	3,894	3,897	3,880	3,894	3,910	
		0,4	3,624	3,627	3,598	3,624	-	
		0,5	3,327	3,333	3,286	3,328	-	
	$\delta = \varphi^\circ$	30°	0	6,549	6,556	6,563	6,677	6,860
			0,1	6,076	6,084	6,083	6,187	6,350
			0,2	5,561	5,566	5,562	5,655	5,790
0,3			4,990	4,996	4,986	5,065	5,170	
0,4			4,335	4,343	4,327	4,390	-	
0,5			3,511	3,526	3,501	3,545	-	
40°		0	18,131	18,150	18,186	18,863	19,620	
		0,1	17,088	17,106	17,131	17,736	18,460	
		0,2	15,992	16,011	16,002	16,607	17,230	
		0,3	14,833	14,853	14,852	15,385	15,940	
		0,4	13,597	13,619	13,606	14,082	-	
		0,5	12,261	12,287	12,260	12,677	-	

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε νέα λύση οριακής ανάλυσης τάσεων για το πρόβλημα βαρυτικών και σεισμικών ωθήσεων γαιών σε τοίχους βαρύτητας, ως εναλλακτική της μεθόδου των χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης. Με χρήση της συνάρτησης Airy και της εγγενούς ιδιότητας της αυτοομοιότητας, το πρόβλημα περιγράφεται από μια μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση. Η αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης ως προς τη μεταβλητή θ , απαιτεί διακριτοποίηση ενός μόνο κυκλικού τόξου, σε αντίθεση με τον κίνναβο των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούν οι λύσεις της μεθόδου των χαρακτηριστικών. Η γνώση της συνάρτησης δυναμικού παρέχει φυσική εποπτεία του προβλήματος και επιτρέπει τον υπολογισμό των τάσεων σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου – όχι μόνο κατά μήκος των γραμμών ολίσθησης. Επιπλέον συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος και ανοίγει το δρόμο στην εφαρμογή, πέραν της αυστηρής αριθμητικής επίλυσης, προχωρημένων αναλυτικών ή απλοποιημένων ημιαναλυτικών μεθόδων.

6. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ III Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γεωργιάδης, Χ.Γ. (2003). "Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών", Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα.
- Δημητρακόπουλος, Α.Ν. (2011). "Προσδιορισμός Βαρυτικών και Σεισμικών Ωθήσεων Γαιών με Οριακή Ανάλυση Τάσεων", Διατριβή Μ.Δ.Ε, Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π.Π.
- Κλουκίνας, Π. (2012). "Συμβολή στη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Τοίχων Αντιστήριξης Μέσω Θεωρητικών και Πειραματικών Μεθόδων", Δ.Δ., Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π.Π.
- Abbott, B.M. (1967). "An Introduction to the Method of Characteristics", Elsevier, NY
- Airy, G.B. (1862). "On the Strains in the Interior of Beams", British Association for the Advancement of Science Report.
- Azarov, N.S. (1975). "Analytical Method for Determination of Backfill Pressure on Retaining Walls", Balashikhinsk Pedagogic Institute (in Russian)-English Translation from Osnovaniya, Fundamenty I Mekhanika Gruntov.
- Boussinesq, J. (1876). "Essai Théorique sur l'Equilibre d'Elasticité des Massifs Pulveruents", *Mem. Savante étrangere*, Acad. Belgique, 40, pp. 1-80.
- Caquot, A. (1934). "Equilibre des Massifs a Frottement Interne, Stabilité des Terres Pulvérulents et Cohérentes", Gauthier-Villars: Paris.
- Cheng, Y.M. (2003). "Seismic Lateral Earth Pressure Coefficients for c-φ Soils by Slip Line Method", *Computers and Geotechnics*, 30, pp. 661-670.
- Coulomb, C.A. (1776). "Essai sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Stratique Relatifs a l' Architecture". *Memoires de Mathematiqueet de Physique, Presentes a l' Academie Royale des Sciences*; Paris, Vol. 7, pp. 343-382.
- Karman, von T. (1927). "Uber Elastische Grenzzustände", *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, p.23, Zurich.
- Kerisel, J. and Absi, E. (1990). "Active and Passive Earth Pressure Tables" A.A. Balkema
- Kötter, F. (1903). "Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften", Berlin, pp 229–233.
- Kumar, J. (2001). "Seismic passive earth pressure coefficients for sands", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 38 (4), pp. 876–81.
- Kumar, J. and Chitikela, S. (2002). "Seismic Earth Passive Pressure Coefficients Using the Method of Characteristics", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 39 (2), pp 463-471.
- Lévy, M. (1873). "Sur une Théorie Rationnelle de l'Equilibre des Terres Fraîchement Remuées et ses Applications au Calcul de la Stabilité des Murs de Soutènement", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 18, 241.
- Malyshev, M.U. (1969). "An Approximate Solution to Ultimate Equilibrium Problems in Loose Media, Based on Linearization of the Initial Equation", *Proc. 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico City, pp.406-408.
- Martin, C.M (2005). "Exact Bearing Capacity Calculations Using the Method of Characteristics", *Proceedings of the 11th IACMAG*, Turin, Vol. 4, 441-450.
- Mylonakis, G., Kloukinas, P. and Papantonopoulos, C. (2007). "An Alternative to the Mononobe–Okabe Equations for Seismic Earth Pressures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 27, Issue 10, Pages 957-969.
- Nadai, A. (1963). "Theory of Flow and Fracture of Solids", McGraw-Hill, New York.
- Prandtl, L. (1923). "Anwendungsbeispiele zu Einem Henckyschen Salt über das Plastische Gleichgewicht." *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 3: 401-406.
- Rankine, W.J.M. (1857). "On the Stability of Loose Earth", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 147, pp. 9 – 27.
- Reissner, H. (1924). "Zum Erddruck Problem", *Proceedings of the First International Congress Applied Mechanics*, Delft, pp.295-311.
- Saint-Venant, B.DE (1870). "Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Lévy...par MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 15, 237.
- Salençon, J. (1977). "Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics", Wiley, NY.
- Sokolovskii, V.V. (1965). "Statics of Granular Media". NewYork : Pergamon. 270 pp.
- Soubra, A.H. (2000). "Static and Seismic Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal* , 37, pp. 463-478.